Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Vorlesung zur Experimentalphysik III
Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. Josef A. Käs
Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung vom 03.11.2008

5 Wechselstromkreise

5.1 Der Resonanzkreis

Beispiel für einen gedämpfen harmonischen Oszillator: Kreis mit ohmschem Widerstand R, einer Induktivität L und einer Kapazität C: Was geht in so einem RLC-Serienkreis wirklich vor?

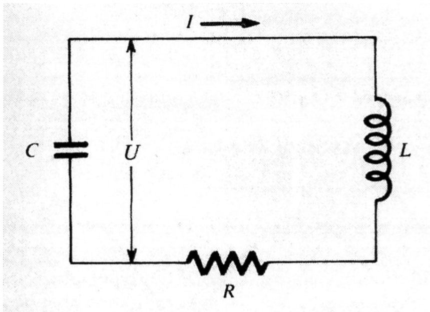

Abbildung 1: RLC-Serienkreis.

Kondensatorladung: Q zur Zeit τ
Potentialdifferenz / Spannung am Kondensator: U = Spannung der beiden in Serie geschalteten Glieder R und L
Positive Stromrichtung: siehe Pfeil
Achtung: Verlustwiderstand der Spule geht in R ein
Bei dieser Vorzeichenwahl:

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \qquad U = L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI$$

$$\Longrightarrow \qquad U = -LC \cdot \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} - RC \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} + \frac{U}{LC} = 0$$

Lösungsansatz: $U = A \cdot e^{-\alpha t} \cos \omega t$ mit den Konstanten A, α und ω.

$$\alpha = R/2L \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha\frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

Da ω eine reele Zahl, gilt immer $\omega^2 \geq 0$.

$$\Longrightarrow \qquad R^2/4L^2 \leq 1/LC \qquad \text{schwache Dämpfung, kleiner Widerstand im Kreis}$$

soll untersucht werden; R, L und C sollen $R < 2\sqrt{L/C}$ genügen. Weiterhin: $B \cdot e^{-\alpha t} \sin \omega t$ stellt für α und ω unter den Bedingungen (s.o.) eine Lösung dar! Allgemeine Lösung: Summen der beiden Ausdrücke

$$U(t) = e^{-\alpha t} \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t\right)$$

A, B sind willkürliche Konstanten, frei wählbar.

Anmerkung: Lösung kann Sinus / Cosinus oder Überlagerung sein, das hängt im trivialer Weise von der Wahl des Nullpunkts der Zeitskala ab! Wesentlich ist eine gedämpfte sinusartig Schwingung.

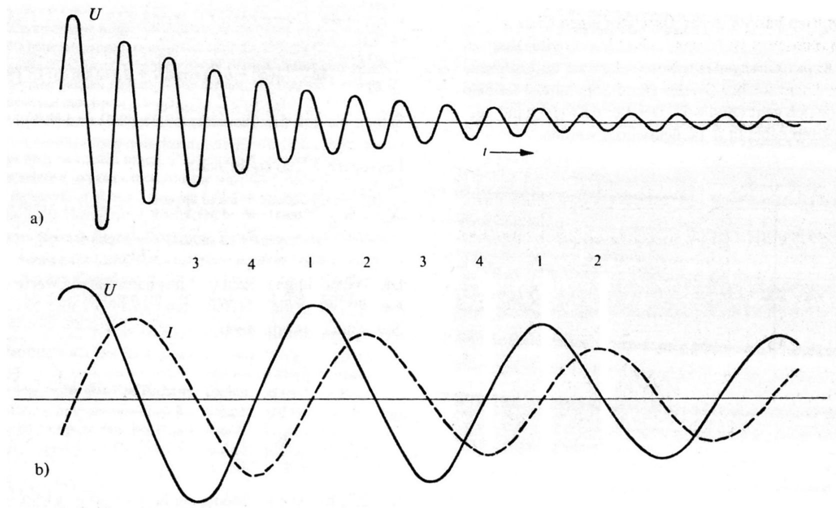

Abbildung 2: a) Die gedämpfte sinusförmige Schwingung der Spannung U in einem RLC-Kreis. b) Ausschnitt aus a) mit gedehnter Zeit-Achse; hinzugefügt ist gestrichelt der Verlauf des Stomes I.

U - gedämpfte Cosinus-Funktion, so ergibt sich für I:

$$I = -\frac{C\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = AC\omega\left(\sin\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right)e^{-\alpha t}$$

α/ω - Maß für die Dämpfung der Schwingung, klein: viele Schwingungen, langsame Abnahme der Amplitude (hier im Bild: $\alpha/\omega = 0{,}04$).
$\Rightarrow$ Cosinus-Term spielt dann keine Rolle und verschiebt die Phase um den Winkel α/ω (Stromschwingung fast genau mit $\pi/2$ gegen die Spannungsschwingung phasenverschoben).

Schwingung führt zu Energieaustausch zwischen magnetischem und elektrischem Feld, Energie pendelt zwischen Kapazität und Induktivität hin und her. Widerstand R des Kreises dissipiert einen Teil der Energie, wodurch nach und nach die Energie verringert wird.

Relative Dämpfung des Oszillators: ausgedrückt durch die Größe Q, „Qualität“, Gütefaktor oder Güte. Für einen Oszillator mit Kreisfrequenz ω gilt

$$Q = \omega\frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{mittlere Energiedissipation}}$$

Definition: Q ist die 2π-fache Anzahl von Schwingungen während die Energie des Oszillators um $1/e$ abnimmt.

Untersuche verschiedene Spezialfälle

1. $R = 0$, ungedämpfter Oszillator, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
2. Sehr große Dämpfung: $R > 2\sqrt{LC}$
   Für zwei Werte von β: Lösung der Form $U = A \cdot e^{-\beta t}$.

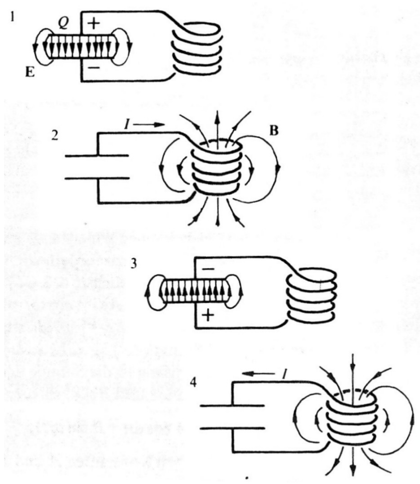

Abbildung 3: Die periodische Energieübertragung vom elektrischen zum magnetischen Feld und umgekehrt. Jedes Teilbild stellt den Zustand zu einem Zeitpunkt das, der durch in ensprechende Zahl in Abbildung 2 b) gekennzeichnet ist.

Allgemeine Lösung: $U(t) = A \cdot e^{-\beta_1 t} + B \cdot e^{-\beta_2 t}$.
Keine Schwingung, Spannung nimmt monoton ab.

3. Kritische Dämpfung: $R = 2\sqrt{LC}$, $\beta_1 = \beta_2$
   Lösung: $U(t) = (A + Bt) \cdot e^{-\beta t}$.
   Die gesamte elektromagnetische Energie nimmt am schnellsten ab!

Induktivität verhindert unstetiges Ansteigen des Stromes, daher $\mathrm{d}U/\mathrm{d}t = 0$ für $t = 0 \Rightarrow$ Hinweis für die Induktivität: Ursprung am Anfang.

5.2 Wechselstrom

Resonanzkreis hatte keine Energiequellen, konnte nur vorübergehend tätig sein! Wechselstomkreis: stationärer Zustand, Wechselspannung: $U = U_0 \cdot \omega t$. Summe der Spannungsabfälle an Elementen des Kreises: U
Gleichung, die für Strom I gelten muss

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = U_0 \cos\omega t$$

Wir wollen uns hier den stationären Falss anschauen, d. h. der Strom schwingt genau mit der Frequenz der Wechselspannung.

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Um I_0 und φ zu bestimmten, muss diese Gleichung in obige Differentialgleichung eingesetzt werden.

$$-LI_0\omega \sin(\omega t + \varphi) - RI_0 \cos(\omega t + \varphi) = U_0 \cos\omega t$$

mit $\quad \sin(\omega t+\varphi) = \sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi \quad$ und $\quad \cos(\omega t+\varphi) = \cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi$

$$\Longrightarrow \qquad -LI_0\omega\left(\sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi\right) + RI_0\left(\cos\omega t \cos\varphi - \sin\omega t \sin\varphi\right) = U_0 \cos\omega t$$

Koeffizienten von $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ gleich Null setzen:

$$-LI_0\omega\cos\varphi - RI_0 \sin\varphi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \tan\varphi = -\frac{\omega L}{R}$$

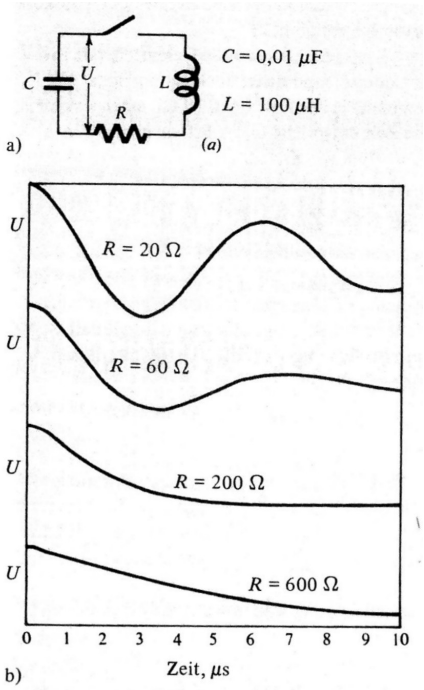

Abbildung 4: a) Nach dem Aufladen des Kondensators wird der Schalter bei $t = 0$ geschlossen. b) Vier Fälle mit unterschiedlicher Dämpfung: 1 und 2 sind schwach gedämpft, der dritte ($R = 200\,\Omega$) ist der aperiodische Grenzfall. Fall 4 ist sehr stark gedämpft.

$$-LI_0\omega\sin\varphi + RI_0\cos\varphi - U_0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad I_0 = \frac{U_0}{R\cos\varphi - \omega L\sin\varphi} = \frac{U_0\cos\varphi}{R}$$

mit $\cos\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$ ergibt sich für I_0:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$$

Achtung: φ ist hier negativ! Die Stromstärke erreicht ihr Maximum später als die Spannung, die „dem Strom vorauseilt".

Betrachte nun statt der Induktivität die Kapazität C:

$$-\frac{Q}{C} + RI = U_0\cos\omega t$$

Lösung für den stationären Zustand:

$$I = I_0\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{mit} \qquad I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

$$\Longrightarrow \qquad Q = -\int I\mathrm{d}t = -\frac{I_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi)$$

Beachte: es ist keine Integrationskonstante nötig, da Q symmetrisch um die Nulllage schwingen muss.
Setze nun Q oben ein:

$$\frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi) + RI_0\cos(\omega t + \varphi) = U_0\cos\omega t$$

Der Ausdruck $\frac{1}{\omega C}$ wird kapazitiver Widerstand genannt und hat die Dimension eines Widerstands $[\Omega]$. Nun sollen die Koeffizienten von $\cos\omega t$ und $\sin\omega t$ wieder getrennt für sich Null werden.

$$\Longrightarrow \qquad \tan\varphi = \frac{1}{R\omega C} \qquad \text{und} \qquad I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Achtung: $\varphi > 0$, d. h. „Strom eilt der Spannung voraus“.

$$\text{Mathematisch:} \qquad I = \frac{4}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\frac{\omega L}{R^2}\right)$$

Partikulare Lösung der Dgl., zu ihr könnte irgendeine Lösung der homogenen Dgl $L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = 0$ addiert werden, die die Lösung $I \propto e^{-\frac{R}{L}t}$ hat.

Physikalische Bedeutung: Anfangsbedingungen ergeben eine abnehmende Komponente von $I(t)$. Nach $t \gg \frac{L}{R}$ verschwindet der Ausdruck, sinusförmige Schwingung bleibt erhalten.

Induktivität und Kapazität in Serie:

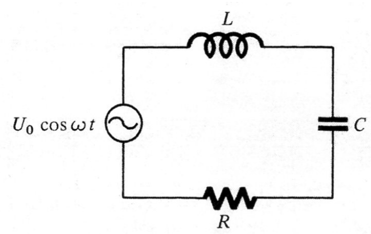

Abbildung 5: Der RLC-Kreis.

Wechselstrom: $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$

$\Longrightarrow$ Spannung an der Induktivität:

$$U_L = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -I_0 \omega L \sin(\omega t + \varphi)$$

$$U_C = -\frac{Q}{C} = \frac{1}{Q}\int I \mathrm{d}t = \frac{I_0}{\omega C}\sin(\omega t + \varphi)$$

An beiden Elementen:

$$U = U_L + U_C = \left(-\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

bei vorgegebener Kreisfrequenz ω einem Element äquivalent (L oder C), ne nachdem ob $\left(-\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ positiv oder negativ.
Wenn $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, dann ist die Reihenschaltung einer Induktivität L' äquivalent.
$\omega L' = \omega L - \frac{1}{\omega C}$: Schaltung bedingt eine Beziehung zwischen Strom und Spannung, die äquivalent zu RL ist.

Anwendung auf einfachen RCL-Kreis:

Beim RC-Kreis ωL durch $\frac{1}{\omega C}$ ersetzt.

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \qquad \tan\varphi = \frac{1}{R\omega C} - \frac{\omega L}{R}$$

Größtmöglicher Strom, wenn die Kreisfrequens der Wechselspannung $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ erfüllt.
$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ ist die Resonanzfrequenz des RLC-Kreises.
I reduziert sich zu:

$$I = \frac{U_0 \cos \omega t}{R}$$

Strom, der beim Ohmschen Widerstand R fließen würde.
Kreisfrequenz der Spannung kann von der Resonanzfrequenz abweichen!

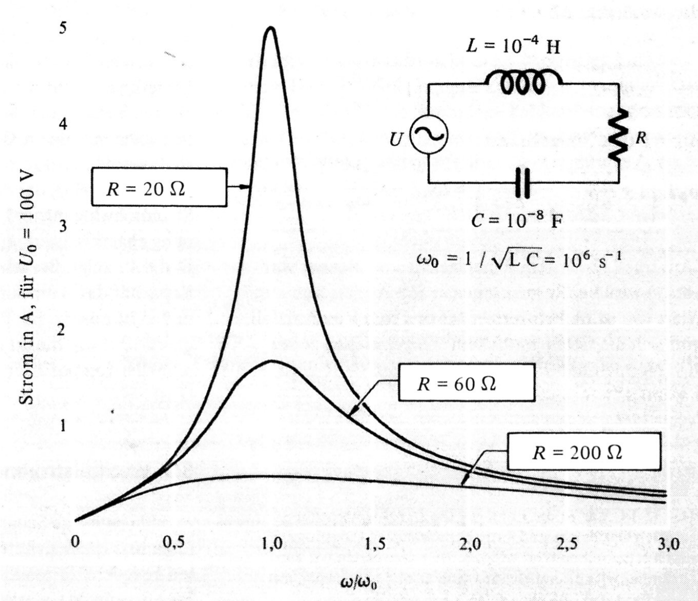

Abbildung 6: Eine Wechselspannung habe in einem RLC-Serienkreis die Amplitude 100 V. Die Stromamplitude ist als Funktion von ω/ω_0 für drei verschiedene Widerstandswerte aufgetragen.

Die Resonanzspitze bei ω_0 ist besonders bei kleinen R ausgeprägt.
Die Resonanzkurve als Funktion der Kreisfrequenz ist steiler und höher, je größer die Güte des Kreises ist!

Untersuchung der Frequenzen:
$\omega = \omega_0 = \Delta\omega$ .. Kreisfrequenz in der Nähe der Resonanzfrequenz
Näherungsweise:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = \omega_0 L \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) - \frac{1}{\omega_0 C \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)}$$

Da $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ folgt:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} \approx \omega_0 L \cdot 2 \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$$

Näherungsweise:

$$2\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}$$

Stromamplitude ist um ein $\frac{1}{\sqrt{2}}$ - faches gefallen, wenn $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}Q$.
Intensität ist dem Amplitudenquadrat proportional.

Trennung von Rundfunksendern
Nur mögich bei hohem Q (einige hundert)
(ohne, dass sich ein der Resonanzfrequenz benachtbarter Sender bemerkbar macht)

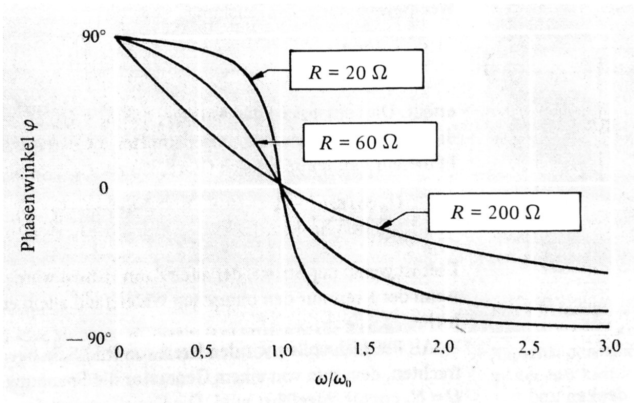

Abbildung 7: Die Änderung des Phasenwinkels mit der Frequenz für den Kreis nach Abbildung 6.

5.3 Wechselstromnetzwerke

Schaltungen aus Widerständen, Kapazitäten und Induktivitäten bezeichnet man als Wechselstromnetzwerke, dei dem die Spannung die Schwingung in Gang hält. In irgendeinem Zweig mit Induktivität L_2 soll gelten:

$$I_2 = I_{02} \cdot (\cos\omega t + \varphi_2)$$

$$U_2 = U_{02} \cdot (\cos\omega t + \theta_2)$$

ω ist für das gesamte Netzwerk konstant. I_0 und φ_2 reichen, um I in einem bestimmten Zweig festzulegen.

Prinzipiell gilt: U und I können durch Aufstellen und Lösen aller passenden Differentialgleichungen ermittelt werden. Einfacher und Eleganter lassen sie sich jedoch mit den folgenden Annahmen bestimmen:

1. Wechselströme und -spannungen können als komplexe Zahlen dargestellt werden. (Erinnerung: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ mit $i^2 = -1$)

2. Charakterisierung des beliebigen Zweiges des Netzwerks ist möglich durch Spannung und Strom in dem Netzwerkzweig.

Regel: Statt der periodischen Funktionen kann man die komplexen Zahlen, die für sie stehen, addieren/subtrahieren. Entsprechung gilt aber nicht für die Multiplikation.

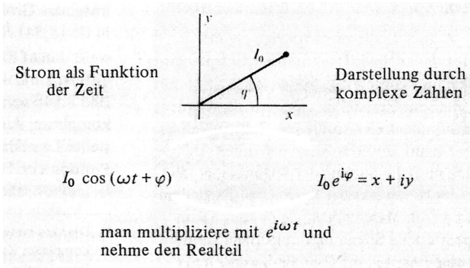

Abbildung 8: Regeln für die Darstellung eines Wechselstoms durch eine komplexe Zahl.

5.4 Impedanz und Admittanz

RL-Kreis: Spannungsschwung durch U_0, Strom I durch $I = I_0 \cdot e^{i\varphi}$ dargestellt.

$$I_0 = U_0/\sqrt{R^2+\omega^2 L^2} \qquad \text{mit} \qquad \varphi = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$Y = \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \qquad I = Y \cdot U$$

Y ist eine definierte komplexe Zahl, der Scheinleitwert bzw. Admittanz. Kehrwert von Y: Impedanz Z, gemessen in Ohm

$$U = \frac{1}{Y} I = ZI$$

Admittanz einer widerstandslosen Spule:

$$Y = -\frac{i}{\omega L} \quad \Rightarrow \quad \text{Faktor } -i\text{, Strom eilt mit, Phasendifferenz } \varphi \text{ der Spannung hinterher.}$$

Kapazität: $Y = i\omega C$
Jeder Kreis kann aus den Elementen R, L, C aufgebaut werden:

	Admittanz	Impedanz
R	$1/R$	R
L	$-i/\omega L$	$i\omega L$
C	$i\omega C$	$-i/\omega C$

Reihenschaltung von Elementen: Addition der Impedanzen
Parallelschaltung von Elementen: Addition der Admittanzen
Nur für lineare Kreiselemente (lineare Dgl. beschreiben den Kreis).
Nichtlineare Elemente: wichtige Elektronik-Bauteile.

5.5 Leistung und Energie

$$P = RI^2 = U_0^2 \cos^2 \omega t \qquad \overline{p} = \frac{1}{2}\frac{U_0^2}{R}$$

Beschreibung nicht durch Amplitudenwerte, sondern durch das $1/\sqrt{2}$-fache $\Rightarrow$ Effektivwerte I_{eff}, U_{eff}.

$$\Longrightarrow \qquad \overline{p} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$$

Beipiel: Amplitude der Netzspannung $U_0 = 311\,\mathrm{V}$ bei einer Frequenz von $\nu = 50\,\mathrm{Hz}$
Potentialdifferenz $U(t) = U_0 \cos \omega t = U_0 \cos (2\pi\nu t) = 311\,\mathrm{V}\ \cos (314/\mathrm{s} \cdot t)$

$$\overline{p} = \overline{U} \cdot \overline{I} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{p} = U_{\mathrm{eff}} \cdot I_{\mathrm{eff}} \cdot \cos \varphi$$