

5 Wechselstromkreise

5.1 Wiederholung

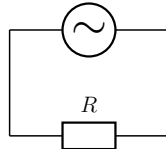


Abbildung 1: R -Serienkreis.

Wechselspannung: $I = I_0 \sin \omega t$

$$U = IR = 0 \quad \text{Kirchhoffs Maschenregel}$$

$$U = I_0 R \sin \omega t = U_0 \sin \omega t$$

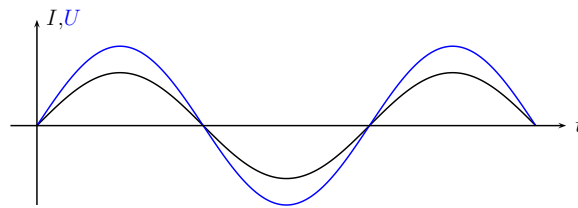


Abbildung 2: I, U -Zeit-Diagramm.

Wechselspannung mit Induktivität:

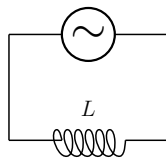


Abbildung 3: L -Serienkreis.

$$U - L \cdot \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\implies U = L \cdot \frac{dI}{dt} = L \cdot I_0 \omega \cos \omega t = U_0 \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$U_0 = I_0 X_L \text{ mit } X_L = \omega L$$

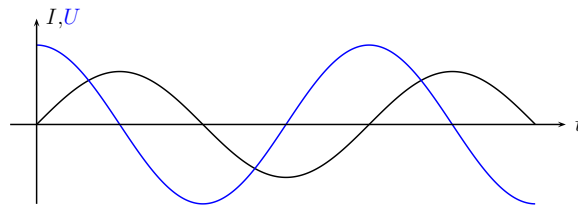


Abbildung 4: I, U -Zeit-Diagramm.

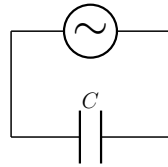


Abbildung 5: C -Serienkreis.

Wechselspannung mit Kapazität:

$$U = \frac{Q}{C} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = I = I_0 \sin \omega t$$

Integration liefert:

$$Q(t) - Q(t=0) = \int_0^t I_0 \sin \omega t' dt' = -\frac{I_0}{\omega} (\cos(\omega t) - 1)$$

$$Q(t=0) = \frac{I_0}{\omega} \quad Q(t) = -\frac{I_0}{\omega} \cos \omega t$$

$$U = \frac{Q}{C} = -I_0 \frac{1}{\omega C} \cos \omega t = -I_0 \frac{1}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$U = I_0 X_C \text{ mit } X_C = \frac{1}{\omega C}$$

L, R, C in Reihe:

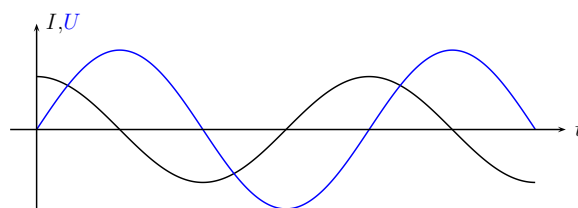


Abbildung 6: I, U -Zeit-Diagramm.

$$U = U_R + U_L + U_C \quad I = I_0 \sin \omega t$$

$$U = U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

$$U_0 = I_0 \cdot Z \quad \text{mit} \quad U_0 = \sqrt{U_{R_0}^2 + (U_{L_0} - U_{C_0})^2} = \sqrt{I_0^2 R^2 + (I_0 X_L - I_0 X_C)^2}$$

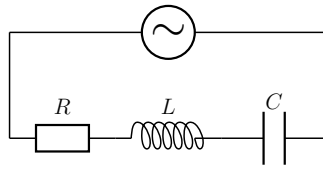


Abbildung 7: L, R, C -Reihenkreis.

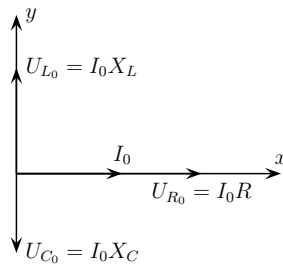


Abbildung 8: Zeigerdiagramm 1.

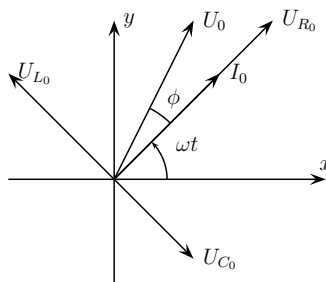


Abbildung 9: Zeigerdiagramm 2.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\cos \phi = \frac{U_{R_0}}{U_0} = \frac{I_0 R}{I_0 Z} = \frac{R}{Z}$$

$$U = Z \cdot I \quad \text{mit} \quad Z = R \quad \text{oder} \quad i\omega L \quad \text{oder} \quad \frac{1}{i\omega C}$$

L, R, C parallel geschaltet:

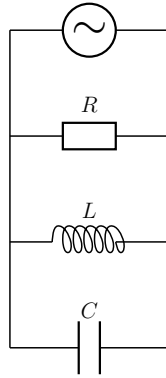


Abbildung 10: L, R, C -Parallelkreis.

$$U = U_0 \cos \omega t \quad I = I_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$I = I_R + I_L + I_C$$

$$\phi_R = 0 \quad \phi_L = 90^\circ \quad \phi_C = -90^\circ$$

$$I_0^2 = I_R^2 + (I_L - I_C)^2 = U_0^2 \left(\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}}$$

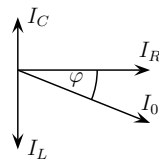


Abbildung 11: Zeigerdiagramm für die Ströme.

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}$$

$$\tan \phi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}}$$

5.2 Leistung im Wechselstromkreis:

Kreis mit Widerstand R :

$$P = UI = RI^2 = \frac{U_0^2}{R} \cos^2 \omega t \quad \Longrightarrow \quad \langle P \rangle = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R}$$

Kreis mit Induktivität L :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T U(t)I(t)dt = \frac{1}{T} U_0 I_0 \int_0^T \sin \omega t \cos(\omega t) dt = 0$$

Kreis mit Kapazität C :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_0 \sin \omega t \cdot \left(-I_0 \frac{1}{\omega C} \cos \omega t \right) dt = 0$$

5.3 Schwingkreis:

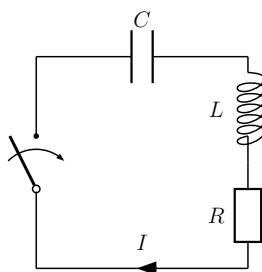


Abbildung 12: Schaltplan eines Schwingkreises.

$$-RI - L \frac{dI}{dt} = U_C = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t I d\tau$$

$4L > CR^2$:

$$I = \frac{-U_0}{\omega_e L} \cdot e^{-\delta t} \sin \omega_e t$$

Dämpfung: $\delta = \frac{R}{2L}$ Resonanzfrequenz: $\omega_e = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{CR^2}{4L}}$

Bemerkung: Vgl. Analogie zum Pendel:

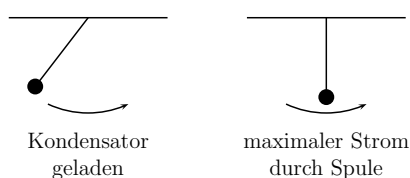


Abbildung 13: Zur Analogie zum Pendel.