Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Vorlesung zur Experimentalphysik III
Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. Josef A. Käs
Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung vom 10.11.2008

6 Maxwell'sche Gleichungen

6.1 Die Gleichungen

Farady $\Longrightarrow$ James Clark Maxwell

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{Verschiebungsdichte}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \text{Coulombsches Gesetz / Elementarladung}$$

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \qquad \text{Ströme sind Quelle des Magnetfeldes}$$

6.2 Elektromagnetische Wellen

im leeren Raum: $\rho = 0 \qquad \vec{I} = 0$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\vec{E} = 0$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

Bastle mir elektromagn. Wellen:
$\vec{E}$-Feld: $E_x = E_y = 0$

$$E_z = \begin{cases} E_0 \frac{y-ct}{a} & ct \leq y \leq ct + a \\ E_0 \frac{2a-y+ct}{a} & ct + a \leq y \leq ct + 2a \end{cases}$$

$\vec{B}$-Feld: $B_y = B_z = 0$

$$E_x = \begin{cases} B_0 \frac{y-ct}{a} & ct \leq y \leq ct + a \\ B_0 \frac{2a-y+ct}{a} & ct + a \leq y \leq ct + 2a \end{cases}$$

Maxwell-Gleichungen erfüllt?

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \quad \checkmark \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad ! \qquad \frac{\partial B_x}{\partial x} = 0 \quad !$$

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

$ct \leq y \leq ct + a$:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = \frac{E_0}{a}\vec{e}_x \qquad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{c}{a} E_0 \vec{e}_z$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = -\frac{B_0}{a}\vec{e}_z \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{c}{a}B_0\vec{e}_x$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \frac{E_0}{a}\vec{e}_x = -\left(-\frac{c}{a}B_0\vec{e}_x\right) \\ -\frac{B_0}{a}\vec{e}_z = \frac{1}{c^2}\left(-\frac{c}{a}E_0\vec{e}_z\right) \end{array} \quad \Longrightarrow \quad E_0 = cB_0$$

analog für $ct + a \leq y \leq ct + 2a$

elektromagn. Welle:

I. Ausbreitungsgeschwindigkeit c, Wellenform unverändert
II. $\vec{E} \perp \vec{B}$ Ausbreitungsrichtung $\vec{E} \times \vec{B}$
III. $E = cB$

6.3 Wellengleichung

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{E} = \mathrm{rot}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\mathrm{grad}\,\underbrace{\mathrm{div}\vec{E}}_{=0} - \Delta\vec{E} = -\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = c^2\Delta\vec{E} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0}\Delta\vec{E}$$

analog:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = c^2\Delta\vec{B}$$

elektromagn. Wellen, allgemein:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k}\vec{x} - ct)$$

für eine beliebige C^2-Funktion.
Wiederholung:
Homogene Wellengleichung: $\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$ (1-dim.)
Lösung: $U = \cos(kx - \omega t + \varphi)$ mit $\omega = |k|\,c$
Komplexe Lösung: $U = e^{i(kx-\omega t+\varphi)}$
Außerdem wenn f, g Linearkombinationen von Kosinus-Funktionen sind:
Allg. Lösung: $U = f(x+ct) + g(x-ct) = \Re\int \mathrm{d}kUe^{i(kx-\omega t+\varphi)}$
Lösungen der Maxwell-Gleichungen im leeren Raum erfüllen Wellengleichung:

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \Longrightarrow \quad \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit:} \quad c = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0} \quad \text{Lichtgeschwindigkeit}$$

Welle ohne Trägermedium!
Lichtgeschwindigkeit ist eine Naturkonstante.
Lösung:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{k}\vec{x} - ct)$$

zusätzliche Forderungen aus Maxwell-Gleichungen:

$$\nabla\vec{E} = \vec{k}\vec{E}_0 f'(\vec{k}\vec{x} - ct) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{E}\vec{k} = 0$$

$\Longrightarrow$ $\vec{E}$-Feld steht senkrecht zur Propagationsrichtung, Transversalwelle.

$$\nabla \times \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E}_0 f'(\vec{k}\vec{x} - ct) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{B} = \frac{1}{c}\vec{k} \times \vec{E}$$

magn. Feld $\perp$ elektr. Feld $\perp$ Ausbreitungsrichtung

$$E_0 = cB_0$$

Energiedichte des elektromagnetischen Feldes

$$\omega = \frac{1}{2}\epsilon_0 \left(E^2 + c^2 B^2\right)$$

$$\omega_{EM} = \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2$$

Poynting-Vektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \qquad \text{Energiestromdichte}$$

$$I = \left|\vec{S}\right| \qquad \text{Intensität}$$

$$[I] = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

Polarisation

Eine Transversalwelle ist durch 2 Richtungen charakterisiert: Den wellenvektor (Ausbreitung) und den darauf senkrecht stehenden Feldvektor des elektrischen Feldes. Dies läßt jedoch noch einen Rotationsfreiheitsgrad offen:

- **lineare Polarisation:** Feldvektor zeigt immer in eine feste Richtung
- **zirkulare Polarisation:** Feldvektor dreht sich beim Voranschreiten der Welle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Wellenvektor und ändert seinen Betrag nicht
- **elliptische Polarisation:** Feldvektor rotiert um den Wellenvektor und ändert dabei periodisch den Betrag. Die Spitze des Feldvektors beschreibt dabei eine Elipse.

6.4 Elektromagnetische Felder in Materie

Permittivität ϵ:

elektromagn. Felder verschieben Ladungen in Materie und bauen somit selbst ein Feld auf
ϵ ist die Permittivität oder dielktrische Leitfähigkeit. Sie beschreibt die Durchlässigkeit eines Materials für elektrische Felder
ohne Matrier:

$$\text{elektr. Feldkonstante} \quad \epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{VM}}$$

in Dielektrika:
In isolierenden Stoffen orientieren sich die Ladungsträger des Isolationsmaterials am elektr. Feldvektor und bilden ein Polarisationsfeld, das dem äußeren Feld entgegenwirkt.

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r \epsilon_0} \qquad \epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \qquad \text{rel. Permittivität}$$

$D:$ elektr. Erregung

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 1 + \chi \qquad \chi: \text{ elektr. Suzeptibilität}$$

In kristallinen Strukturen mit anisotroper Ordnung wird ϵ_r zum Tensor.

Dispersion:
Bei Wechselfeldern bilden sich Potensationsfelder, die gegebenenfalls der angelegten äußeren Feldgröße um einen gewissen Phasenwinkel nacheilen und frequenzabhängig reagieren.

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i\epsilon_r''(\omega)$$

Permeabilität μ:
Durchlässigkeit von Materie für magnetische Felder.

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

$\vec{B}:$ magn. Flußdichte $\qquad \vec{H}:$ magn Feldstärke

im Vakuum: μ_0 magn. Feldkonstante

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi$$

$\mu_r:$ relative Permeabilität $\qquad \chi:$ magn. Suzeptibilität

Diamagnetische Stoffe: z. B. Stickstoff, Kupfer, Wasser

$$0 \leq \mu_r < 1$$

Wegen Lenz'scher Regel geringfügig kleiner als im Vakuum

Supraleiter: $\mu_r = 0$

Paramagnetische Stoffe: z. B. Luft, Platin

$$\mu_r > 1$$

In paramagnetischen Stoffen richten sich die atomaren magnetischen Momente in externen Magnetfeldern aus und verstärken damit das Magnetfeld

Ferromagnetische Stoff: z. B. Eisen, Cobalt, Nickel

$$\mu_r \gg 1$$