

Maxwell'sche Gleichungen in Materie:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Induktionsgesetz}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \text{Verschiebungsstrom}$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad \text{Elementarladung}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \text{keine magn. Elementarladung}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{O} \quad \text{elektr. Polarisation}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{j} \quad \text{magnet. Polarisation}$$

7 Elektromagnetische Felder

7.1 Dipolantenne

- Eine Dipolantenne ist eine gestreckte Antenne, die aus einem geraden Metallstab oder Draht besteht, der auch geteilt sein kann.
- Wandelt hochfrequenten Wechselstrom und elektromagnetische Wellen ineinander um
 Senden ↔ Empfangen
- Optische Länge ist etwas die Hälfte der Wellenlänge λ des speisenden Wechselstroms.

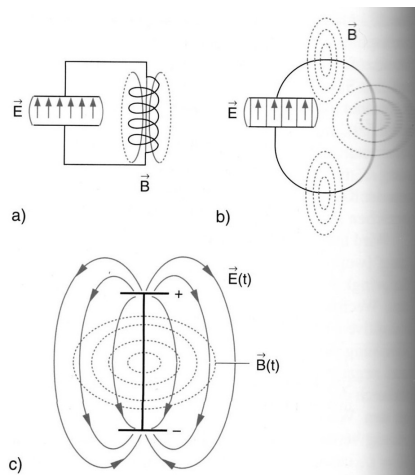


Abbildung 1: Änderung des elektromagnetischen Feldes beim Übergang vom Schwingkreis mit räumlich begrenzten elektrischen und magnetischen Feldern zum offenen Schwingkreis mit Feldern, die weit in den Raum hineinreichen.

- Das Prinzip der Dipolantenne geht auf den deutschen Physiker Heinrich Hertz, der als erster elektromagn. Wellen experimentell nachweisen konnte, zurück.
- Stromverteilung im Dipol und \vec{E} -Felder: siehe Abbildung 2.

Ladungs- und Stromverteilung

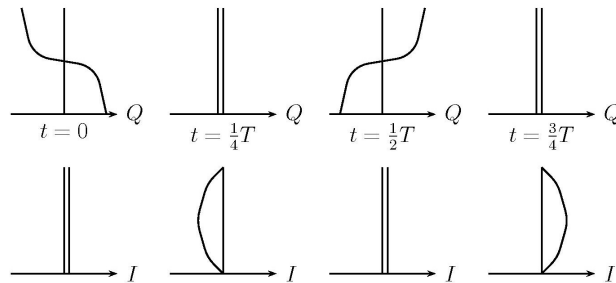


Abbildung 2: Ladungs- und Stromverteilung beim hertz'schen Dipol.

Ausbreitung des Elektromagn. Feldes:

Das Nahfeld ist in den Abbildungen 3 und 4 dargestellt. Im Fernfeld, also in großer Entfernung, verlaufen die Wellenfronten quasi ungekrümmt.

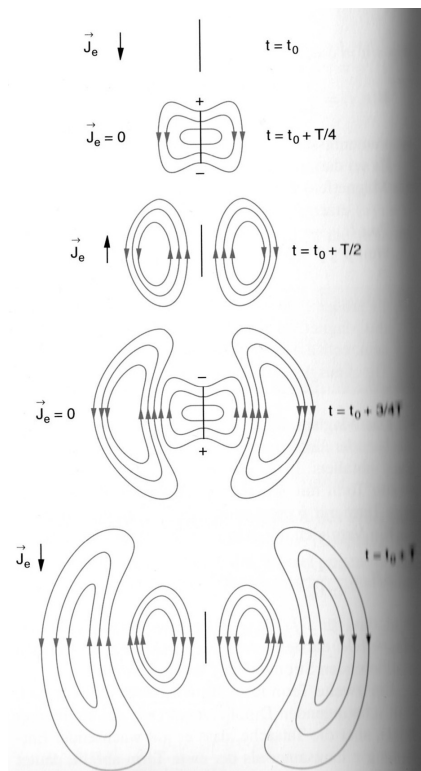


Abbildung 3: Elektrisches Feldlinienbild des hertz'schen Dipols zu Zeitpunkten $t = t_0 + n \cdot T/4$. Die Verteilung ist rotationssymmetrisch um die Dipolachse.

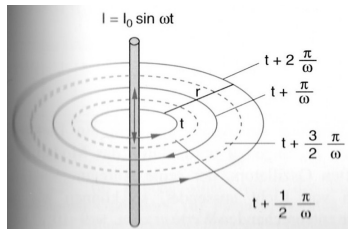


Abbildung 4: Magnetisches Feldlinienbild des hertzschen Dipols in der Äquatorebene.

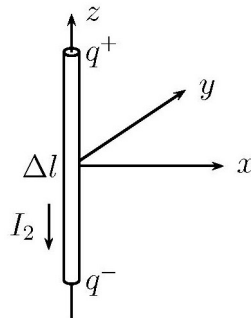


Abbildung 5: Zur Herleitung des Dipolfeldes.

7.2 Herleitung Dipolfeld, Hertzscher Dipol

Betrachte: Wechselladungen $+q$ und $-q$, $\omega = 2\pi f$ und beachte $\Delta l \ll \lambda = \frac{c}{f}$

$$\vec{j}(\vec{r}) = \frac{I_z}{F} e^{i\omega t} \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot} \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\text{rot} \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$$\Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = -\mu \vec{j}(\vec{r}, t)$$

allg. Lösung = homogene Lsg + partikuläre Lsg

homogene Lsg: freie Schwinung der Wellengleichung

partikuläre Lsg: erzwungene Schwinung

partikuläre Lsg:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_q} \frac{1}{r} \vec{j}(t - r/c) dV$$

harmonische Zeitabhängigkeit

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_q} \underbrace{\vec{j}(\vec{r})}_{=\frac{I_z}{F} \vec{e}_z} \frac{1}{r} e^{-ikr} dV \quad k = \frac{\omega}{c}$$

$$\Rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = A_z(\vec{r}) \cdot \vec{e}_z \quad dV = F dz$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\Delta l/2}^{\Delta l/2} \frac{I_z}{F} \frac{1}{r} e^{-ikr} F dz \vec{e}_z$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_z \Delta l \underbrace{\frac{e^{-ikr}}{r}}_{\text{Kugelwelle}} \vec{e}_z$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_z \Delta l \frac{e^{-i\omega(t-v/c)}}{r} \vec{e}_z$$

in Kugelkoordinaten:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_z \Delta l \frac{e^{-i\omega(t-v/c)}}{r} \left(\underbrace{\cos \vartheta \cdot \vec{e}_r}_{A_r} - \underbrace{\sin \vartheta \cdot \vec{e}_\vartheta}_{A_\vartheta} \right)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \text{rot} A(\vec{r}, t)$$

$$H_r = H_\vartheta = 0 \quad \text{da} \quad A_\varphi = 0$$

mit $k = \frac{2\pi}{\lambda}$:

$$H_{\text{varphi}} = \frac{1}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot A_\vartheta) - \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_\varphi \right) = \frac{I_z \Delta l}{4\pi r} \sin \vartheta \left(\frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-ikr} e^{i\omega t}$$

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) = i \frac{I_z \Delta l}{2\lambda} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \left(1 + \frac{1}{ikr} \right) e^{i\omega(t-r/c)}$$

$$\text{rot} \vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(\vec{r}, t)$$

im freien Raum $\vec{I} = 0$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \text{rot} \vec{H}(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \cdot H_\varphi) \right) \cdot \vec{e}_r - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r \cdot H_\varphi) \right) \cdot \vec{e}_\vartheta \right)$$

Lösung: $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

$$E_r(r, \vartheta, t) = \frac{I_z \Delta l}{2\lambda} 2Z_0 \cos \vartheta \left(\frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda} r^2} + \frac{1}{i \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 r^3} \right) e^{i\omega(t-r/c)}$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta, t) = i \frac{I_z \Delta l}{2\lambda} Z_0 \sin \vartheta \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{i \frac{2\pi}{\lambda} r^2} - \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 r^3} \right) e^{i\omega(t-r/c)}$$

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) = i \frac{I_z \Delta l}{2\lambda} \sin \vartheta \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{2\pi}{\lambda} r^2} \right) e^{i\omega(t-r/c)}$$

Fernfeld:

$$E_r(r, \vartheta, t) \approx 0$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta, t) \approx i \frac{I_z \Delta l}{2\lambda} Z_0 \sin \vartheta \frac{1}{r} e^{i\omega(t-r/c)}$$

$$H_\varphi(r, \vartheta, t) \approx i \frac{I_z \Delta l}{2\lambda} \sin \vartheta \frac{1}{r} e^{i\omega(t-r/c)}$$