

## 1 Felder bewegter Ladungen

### 1.1 Historie

- 1819/20 liest H. C. Oersted in Kopenhagen eine Vorlesung über Elektrizität / Galvanische Erscheinungen / Magnetismus
- Er hatte die Vorstellung einer versteckten Erscheinungsform der Elektrizität

#### **Experiment:**

*Legt man einen stromdurchflossenen Draht senkrecht zur Kompassnadel passiert nichts, legt man ihn parallel zur Nadel, richtet sich diese aus. Bei Umpolung wird die Ausrichtung umgekehrt!*

- Es folgt eine stürmische Entwicklung durch Beiträge von Ampère, Faraday, Maxwell ...
- Die spezielle Relativitätstheorie hat ihre Wurzeln im Elektromagnetismus
- Darstellung der Phänomene in chronologisch „umgekehrter“ Reihenfolge: Betrachtung der Kenntnisse über Ladungen und Felder unter dem Gesichtspunkt der speziellen Relativitätstheorie

### 1.2 Magnetische Kräfte, einige Erscheinungen

#### **Experiment:**

*Zwei parallele Drähte werden in derselben Richtung von Strömen durchflossen, eine Anziehung der Drähte wird beobachtet. Werden die Drähte in entgegengesetzten Richtungen durchflossen, findet eine Abstoßung statt.*

#### **Definition des Ampere**

Ein Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderten elektrischen Stromes, der durch zwei parallel im Vakuum im Abstand von 1 m angeordnete, gradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern die Kraft von  $2 \cdot 10^{-7}$  N hervorrufen würde.

#### **Experiment:** (Bewegung eines freien geladenen Teilchens)

*Elektronen in einer Kathodenstrahlröhre werden von einem äußeren, stromdurchflossenen Draht abgelenkt. Je nach Stromrichtung werden die Elektronen angezogen oder abgezogen.*

Die Beschreibung dieses Phänomens wird durch die Einführung eines Magnetfeldes möglich. Elektrischer Strom ruft ein Magnetfeld hervor, welches den Raum erfüllt. Bewegte Ladungen erfahren dort eine Kraft proportional zur Magnetfeldstärke, die senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor des geladenen Teilchens gerichtet ist. Die Gesamtkraft  $\vec{F}$  auf ein Teilchen mit Ladung  $Q$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist

$$\vec{F} = \underbrace{Q \cdot \vec{E}}_{\text{Kraft auf das ruhende Teilchen}} + \underbrace{Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}_{\text{Kraft auf das bewegende Teilchen (zusätzlich)}} .$$

Dabei ist  $\vec{B}$  der magnetische Feldvektor.

### Gaußsches Gesetz

Man denke sich einen mit der Ladung  $Q$  geladenen Körper, der von einer orientierten, geschlossenen Fläche  $A$  umgeben ist. Der Gesamtfluss  $\Phi$  durch diese Fläche ist nur von der eingeschlossenen Ladung  $Q$  abhängig.

$$\Phi = \oint_{A(t)} E dA = \frac{1}{\varepsilon_0} Q \quad \implies \quad Q = \varepsilon_0 \int_{A(t)} E dA$$

- Messung des Feldes  $\vec{E}$  in einem beliebigen Punkt zur Zeit  $t$  in  $S$  durch eine in  $S$  ruhende Probeladung. Oberflächenintegral: zur Zeit  $t$  von Messungen verschiedener Beobachter, die über  $A$  verteilt sind
- Bei ruhender Ladung  $Q$  von Gestalt/Größe von  $A$  unabhängig, gilt auch für bewegte Ladungen.
- Kann sich die Geschwindigkeit auf Ladungen auswirken?
- Invarianz der Ladungen:

Exakte elektrische Neutralität der Atome und Moleküle ( $H_2$  und He bestehen aus den gleichen geladenen Teilchen,  $2p + 2e^-$ , Bewegung ist aber verschieden: In He sind die Protonen dicht gepackt, in  $H_2$  erfolgt eine langsame Rotation um Schwerpunkt. He: kinetische Energie von 1 MeV, Ladung könnte sich bei Einfluss der Bewegung nicht in besten Fällen aufheben!)

- Masse nicht invariant:  $m_{\text{relativistisch}} = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
- Weitere Beweise: Massenspektrometer finden keinen Unterschied der Ladung von  $D^+$  und  $He^+$  etc.
- Ladung ist für jeden beliebigen Zustand der Relativbewegung invariant!
- Wert des Flächenintegrals  $\int_A E dA$  (aus dem Gaußschen Gesetz) ist nur von der Art und Anzahl der innerhalb von  $A$  vorhandenen geladenen Teilchen abhängig, nicht vom Bewegungszustand. Ist  $S'$  ein anderes Inertialsystem, welches sich relativ zu  $S$  bewegt, und  $A'$  die darin befindliche Oberfläche, die zu  $t'$  dieselben geladenen Körper umschließt, dann gilt

$$\int_{A(t)} E dA = \int_{A'(t')} E' dA'.$$

(Beachte: Ereignisse, die in  $S$  gleichzeitig sind, müssen in  $S'$  nicht gleichzeitig sein!)

- Energie: keine relativistisch invariante Größe.

### 1.3 Messungen des elektischen Feldes in verschiedenen Bezugssystemen

- Ladung soll gegenüber einer Lorentz-Transformation invariant sein (L-Transformationen verbindet Zeit- und Ortskoordinaten für verschiedene Beobachter).
- Bezugssystem  $S$ : Ladungsdichte  $+\sigma$  bzw.  $-\sigma$ , Oberflächenladungen quadratisch, Abstand der Ladungen klein, Feld homogen, Feldstärke für  $S$  ist  $E = 4\pi\sigma$ .

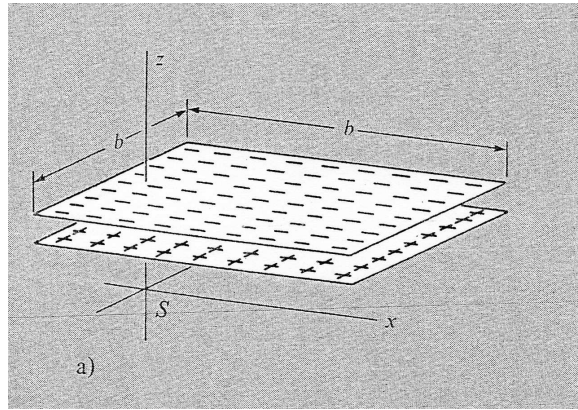


Abbildung 1: Hier: Zwei ruhende Flächenladungen mit gleichförmiger Ladungsdichte im ruhenden Bezugssystem  $S$ .

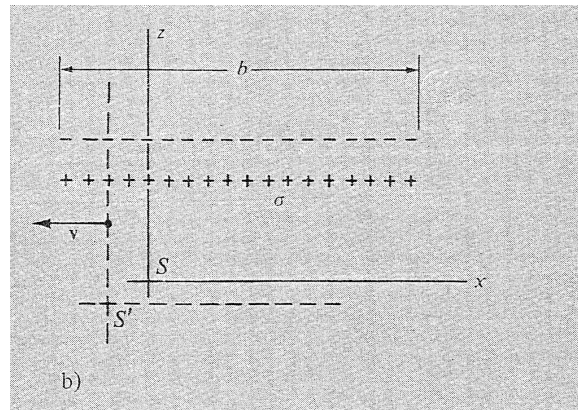


Abbildung 2: Bezugssysteme  $S$  (Abb.1, ruhend) und  $S'$ , letzteres mit der Geschwindigkeit  $v$  nach links bewegend, beide in der Darstellung reduziert auf die Dimensionen  $x$  und  $z$ .

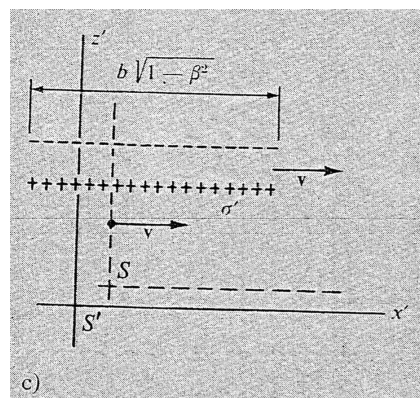


Abbildung 3: Bezugssystem  $S'$ , hier ruhend.

- $S'$  bewegt sich relativ zu  $S$  mit  $v$  nach links. In  $S'$ :  $x'$ -Dimension von  $b$  auf  $b \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$  gekürzt ( $\beta = v/c$ ). Damit ist die Ladungsdichte in  $S'$  um  $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$  größer als die Ladungsdichte  $\sigma$  in  $S$ .
- Feld  $E'$  in  $S'$ ?  
Am besten über eine in  $S'$  ruhende Schachtel, die Ladung ist durch  $\sigma'$  festgelegt, außerhalb des Ladungssystems ist  $E = 0$ .

$$E'_z = 4\pi\sigma' \quad \text{oder} \quad E'_z = \frac{4\pi\sigma}{\sqrt{1 - \beta^2}} = E_z \cdot \gamma \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \geq 1.$$

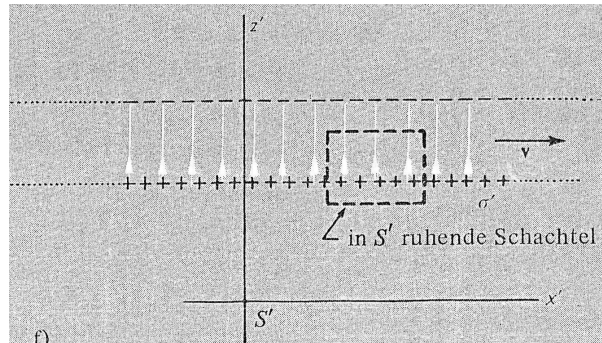


Abbildung 4: Darstellung der in  $S'$  ruhenden Schachtel an der Flächenladung

- Sind die Flächen senkrecht zu  $x$  orientiert: Flächenladungsdichte in  $S$  und  $S'$  gleich  $\Rightarrow E'_x = E_x$ . (Abstand verkürzt sich aber.)
- Allgemein: beliebige Ladungsverteilung, deren Ladungen sich relativ zu  $S$  in Ruhe befinden,  $S'$  bewegt sich mit  $v$  relativ zu  $S$ . Die Komponenten des Feldes  $E'$  in  $S'$ ,  $E'_{||}$  und  $E'_{\perp}$ , lassen sich schreiben:

$$E'_{||} = E_{||} \quad \text{und} \quad E'_{\perp} = \gamma \cdot E_{\perp}.$$

#### 1.4 Punktladung, die sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt

- Im Inertialsystem  $S$  befindet sich eine Punktladung  $Q$  in Ruhe:  $E = k \cdot Q/r^2$  ( $k = 1/4\pi\epsilon_0$ ). Die Komponenten im Punkt der  $x$ - $z$ -Ebene sind:

$$E_x = \frac{kQ}{r^2} \cos \theta = \frac{kQx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \quad E_z = \frac{kQz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

- $S'$  bewegt sich mit  $v$  in  $x$ -Richtung. Beziehungen zwischen den Koordinaten durch die Lorentz-Transformation:

$$x = \gamma (x' - \beta ct') \quad y = y' \quad z = z' \quad t = \gamma \left( t' - \frac{\beta x'}{c} \right).$$

Mit  $E'_z = \gamma E_z$  und  $E'_x = E_x$  lassen sich die Feldkomponenten durch die Koordinaten von  $S'$  ausdrücken.

$\Rightarrow$  Nach einigen Schritten (algebraische Umformung) erhält man mit  $E'^2 = E_x'^2 + E_z'^2$ :

$$E' = \frac{kQ}{r'^2} \cdot \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2 \sin^2 \theta')^{3/2}}.$$



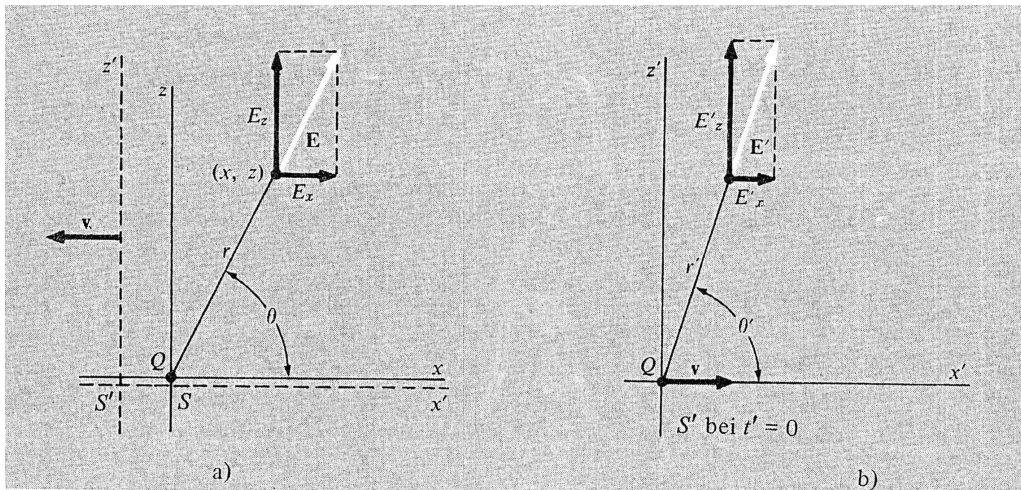


Abbildung 5: Das elektrische Feld einer Punktladung a) in einem Bezugssystem, in dem die Ladung ruht, b) in einem Bezugssystem, in dem sich die Ladung mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Kleine Geschwindigkeiten:  $E' \approx Q/r'^2$  (identisch zu ruhender Punktladung)

Größere Geschwindigkeiten: Feldlinien in „Pfannkuchen“ konzentriert, nicht kugelsymmetrisch und Zirkulation von  $E'$  nicht Null.

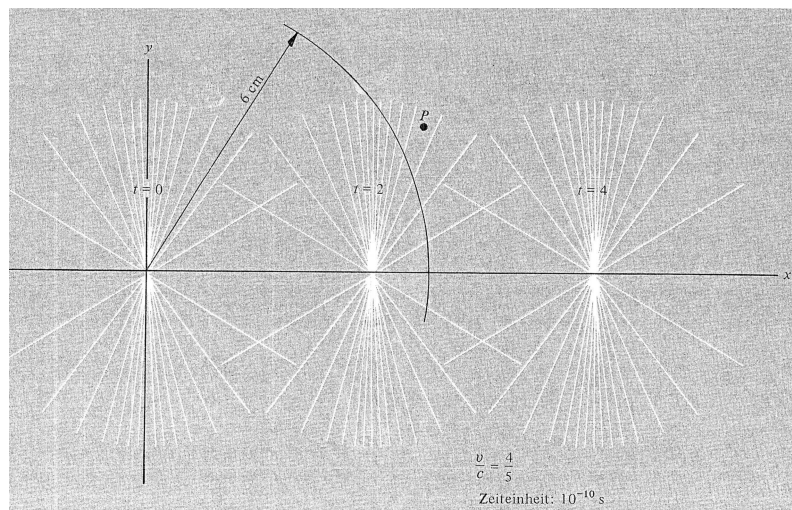


Abbildung 6: Das elektrische Feld einer bewegten Ladung ( $v/c = 4/5$ ), dargestellt zu drei verschiedenen Zeitpunkten.

## 1.5 Felder von Ladungen bei Bewegungsbeginn oder -ende

- Keine gleichförmige Geschwindigkeit.
- Feld eines Elektrons, das bei  $t = 0$  auf  $v$  gebracht wird: In dünner Kugelschale vollzieht sich Übergang von einem Feld zum anderen. Kugelschale dehnt sich mit  $v = c$  aus, der Mittelpunkt der durch die Schale definierten Kugel bleibt in  $x = 0$ .

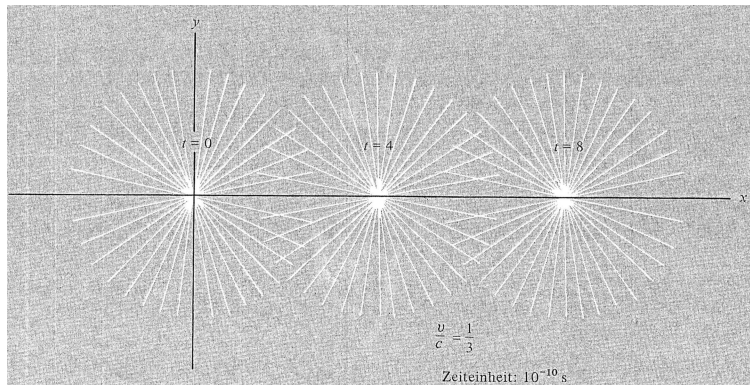


Abbildung 7: Das elektrische Feld einer bewegten Ladung ( $v/c = 1/3$ ), dargestellt zu drei verschiedenen Zeitpunkten.

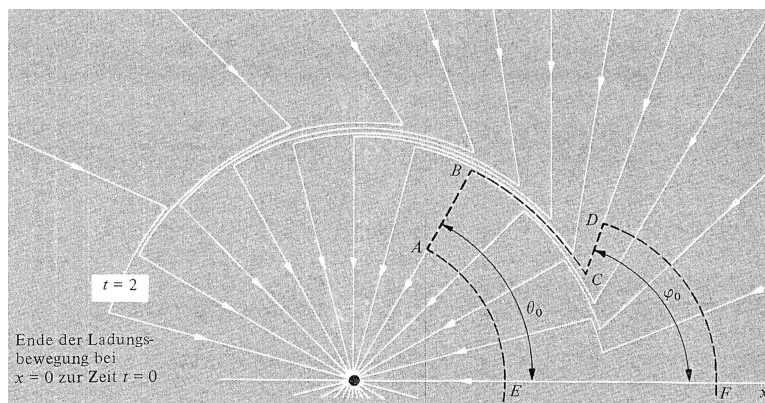


Abbildung 8: Feld einer Ladung bei Bewegungsende.

- Bei plötzlichem Anhalten: „Bürste“ weist auf den Punkt, durch den  $e^-$  gerade gegangen wäre. Außerhalb des Radius  $c \cdot t$ : Bewegungsende nicht feststellbar.

## 1.6 Kraft auf eine bewegte Ladung

- Welche Kraft wird auf eine sich im Feld anderer Ladungen bewegende Ladung ausgeübt? Betrachte z.B. ein Elektron zwischen den Ablenkplatten des Oszillographen. Gefragt ist die Impulsänderung  $dp/dt$ .
- „Teilchensystem“:  $S'$ , in dem  $Q$  sich in Ruhe befindet. Die Kraft auf  $Q$ :  $F = E' \cdot Q$ ,  $E'$  im Teilchensystem beobachtet.
- Wie wird Kraft von einem System in ein anderes transformiert?  
 $\implies$  Beziehung von Impulskomponenten mit den relativistischen Massen ergibt

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \quad \text{und} \quad \frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} \quad \text{mit} \quad E'_{\parallel} = E_{\parallel}$$

$$\implies \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel} \cdot Q = E_{\parallel} \cdot Q \quad \text{in } S'$$

$$\frac{dp_{\perp}}{dt} = Q \cdot E_{\perp}$$

$\implies$  Die Kraft ist unabhängig von der Teilchengeschwindigkeit!