

Experimentalphysik Modul PH-EP4 / PH-DP-EP4

Zusammenfassung für Vorlesung 3 (16. April 2009) und 4 (20. April), SS 2009

1 Entwicklung der Quantenphysik

Demtröder *Exp. Phys.* 3, Kap. 3

1.1 Experimentelle Hinweise auf Teilchencharakter elektromagnetischer Strahlung

- Die Frage ob Licht eine Welle oder ein Teilchen ist ließ sich mit Hilfe der klassischen Physik nicht klären.
- Beugungseffekte und Interferenz lassen sich allerdings nur mit Hilfe von Wellen erklären
- Eine Reihe von späteren Experimenten (Erklärung der Schwarzkörperstrahlung, Photoeffect, Comptoneffekt, ...) führten zur Quantenmechanik.
- Die Quantenmechanik zeigt, dass zur vollständigen Beschreibung von Licht Wellen- und Teilcheneigenschaften notwendig sind (Welle-Teilchen-Dualismus) und sich diese beiden Beschreibungen ergänzen und nicht widersprechen.

1.1.1 Schwarzkörperstrahlung

Demtröder *Exp. Phys.* 3, Kap. 3.1.1 - 3.1.4.

- Das **Rayleigh-Jeanssche Strahlungsgesetz** (Hohlraumstrahlung)

$$w_\nu(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT d\nu \quad (1)$$

(w_ν - spektrale Energiedichte) führt für $\nu \rightarrow \infty$ zur sog. Resonanzkatastrophe, d.h. spektrale Energiedichte und integrierte Strahlungsdichte divergieren.

- Quantenhypothese (*Max Planck 1904*): Energie ist gequantelt, d.h. sie tritt nur als ganzzahliges Vielfaches von $h \cdot \nu$ mit $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ (**Plancksches Wirkungsquantum**) auf.
- Die Energiequanten $h\nu$ heißen **Photonen**, man kann ihnen eine Masse $m = h\nu/c^2$ zuordnen. Photonen haben die Ruhemasse $m_0 = 0$, d.h. es gibt keine ruhenden Photonen.
- Diese Quantelung der Energieeigenzustände der Hohlraumstrahlung führt zur **Planckschen Strahlungsformel**

$$w_\nu(\nu) d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1} \quad (2)$$

- Die Frequenz des Strahlungsmaximums steigt linear mit der Temperatur T an $\lambda_m \cdot T = \text{const} = 2,88 \cdot 10^{-3} \text{mK}$ (**Wiensches Verschiebungsgesetz**)

- Integriert die Plancksche Strahlungsformel über alle Frequenzen ergibt sich für die in den gesamten Halbraum ($d\Omega = 2\pi$ abgestrahlte Strahlungsleistung) das **Stefan-Bolzmannsche Strahlungsgesetz**

$$\frac{dW}{dt} = \sigma \cdot T^4 \quad (3)$$

mit

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{Wm}^{-2} \text{K}^{-4} \quad (4)$$

1.1.2 Photoelektrischer Effekt

Demtröder Exp. Phys. 3, Kap. 3.1.5. Eine mit UV-Licht bestrahlte negativ geladene Metallplatte emittiert Elektronen (Photoelektrischer Effekt).

Experimentell lässt sich nachweisen:

- die kinetische Energie der Photoelektronen ist nur von der Frequenz des Lichtes **nicht von der eingestrahnten Intensität** abhängig.
- Die **Zahl** der Photoelektronen ist proportional zur Intensität
- Es gibt keine messbare Verzögerung zwischen Lichteinfall und Elektronenemission

Erklärung des Photoeffekts (Einstein, 1905, erhielt dafür 1926 den Nobelpreis):

- Jedes absorbiertes Photon gibt seine Energie $h\nu$ vollständig an ein Elektron ab.
- Es folgt der Energiesatz für die maximal kinetische Energie der Photonen:

$$E_{\text{kin}}^{\text{max}} = h\nu - W_a, \quad (5)$$

wobei W_a die Austrittsarbeit des Kathodenmaterials ist.

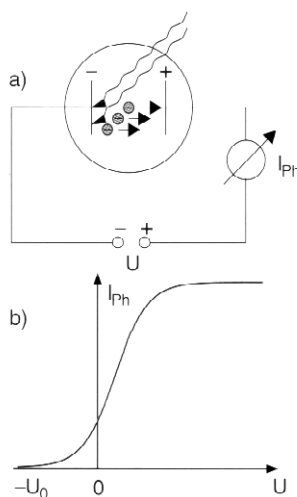


Abb. 3.9. (a) Photozelle zur Messung des Photostroms als Funktion der angelegten Spannung; (b) Photostrom $I(U)$

1.1.3 Compton-Streuung

Tipler, Kap. 34.2, Demtröder Kap. 3.1.6

Ein weiterer Hinweis auf die Richtigkeit des Photonenbildes ist der Compton-Effekt (1921):

- Ein Photon (Röntgenstrahlung) stößt elastisch gegen ein freies Elektron. Das Elektron erfährt eine Rückstoß. Dadurch verringert sich die Energie des Photons. Für die Wellenlängenänderung ergibt sich:

$$\lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) \quad (6)$$

- $\lambda_C = h/mc$ wird als **Compton-Wellenlänge** des Elektrons bezeichnet.

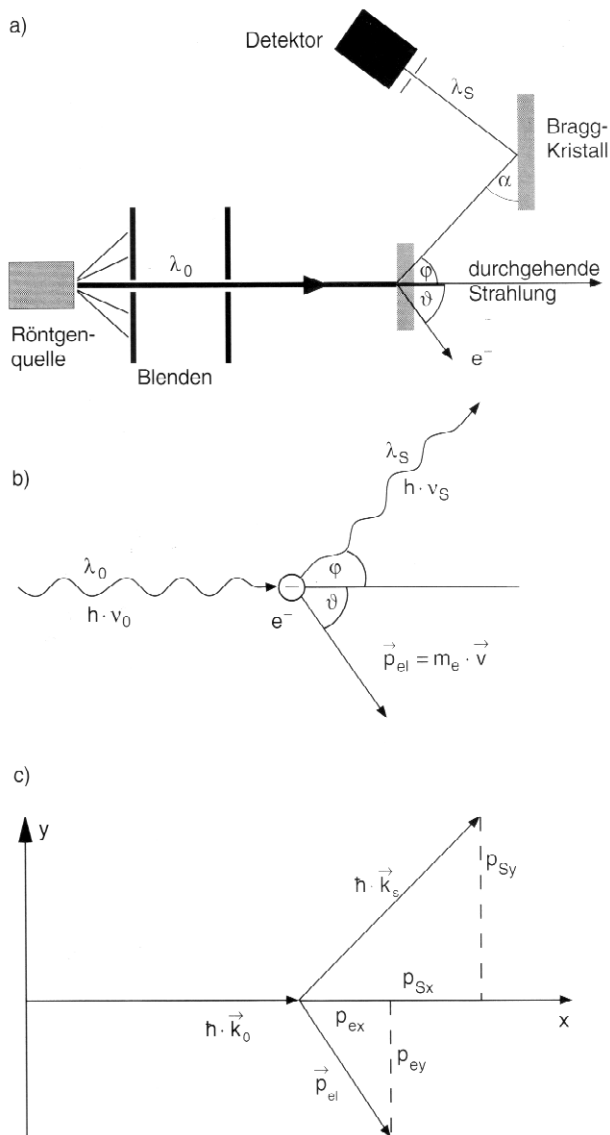


Abb. 3.12a–d. Comptoneffekt: (a) Experiment; (b) Schema; (c) Vektordiagramm;

1.1.4 Eigenschaften der Photonen

Demtr. 3.1.7

- Der Comptoneffekt zeigt dass sich den Photonen ein Impuls zuordnen lässt:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (7)$$

mit $\hbar = h/2\pi$ und dem Betrag:

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (8)$$

- Gemäß $E = mc^2$ kann man dem Photon die Masse

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \quad (9)$$

zuordnen. Für die Ruhemasse ergibt sich aus dem relativistischen Energiesatz

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (10)$$

mit $E = h\nu$ die Ruhemasse des Photons zu

$$m_0 = 0 \quad (11)$$

1.1.5 Experiment zu Wellen- und Teilchenbeschreibung des Lichts

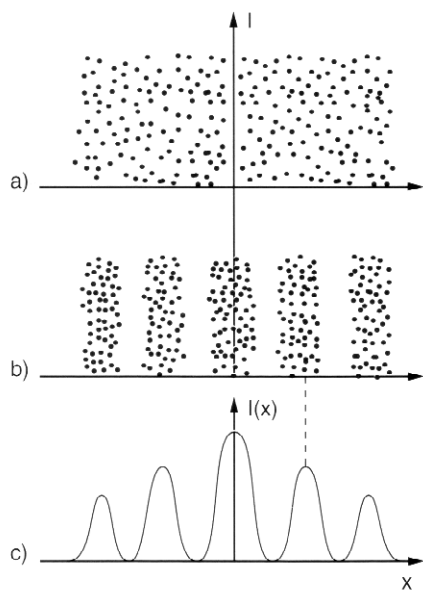


Abb. 3.16a–c. Erzeugung einer Interferenzstruktur mittels Interferenz am Doppelspalt **(a)** für sehr kleine Lichtintensitäten, bei denen $\Delta N > N_{\max} - N_{\min}$ ist; **(b)** für $\Delta N \approx N_{\max} - N_{\min}$; **(c)** für große Intensitäten

Führt man den Youngschen Doppelspaltversuch (vgl. Demtr. Bd. 2 Kap. 10.2) mit sehr geringen Intensitäten durch stellt man fest, dass zunächst eine körnige Struktur auf dem Schirm entsteht. Einzelne Punkte entstehen durch eintreffende Photonen. Erst bei größerer Intensität geht das Bild langsam in das bekannte Interferenzmuster über.

1.2 Der Wellencharakter von Teilchen

Demtr. 3.2

1.2.1 Die de-Broglie-Wellenlänge und Elektronenbeugung

Louis de Broglie (Nobelpreis 1929) dehnte die Beschreibung durch den Welle-Teilchen Dualismus auf Teilchen wie Elektronen, Neutronen und Atome aus.

Wendet man die Beziehung $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ auf ein Teilchen mit der Masse m an, so erhält man die **de-Broglie-Wellenlänge**:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} \quad (12)$$

Der Experimentelle Nachweis gelang 1926 C. J. Davidson (Nobelpreis 1937) und L. H. Germer, die zeigten, dass Elektronenbeugung an einer dünnen Folie ein ähnliches Interferenzmuster ergibt wie Röntgenbeugung an der selben Folie. Die Ringstruktur hing gemäß $\lambda = h / \sqrt{2meU}$ von der angelegten Beschleunigungsspannung ab.

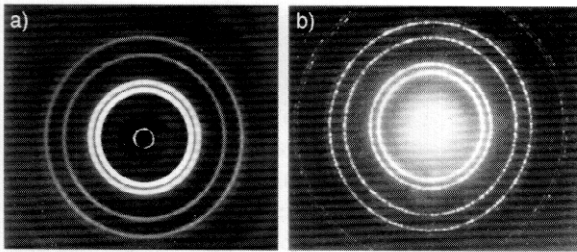


Abb. 3.18a,b. Vergleich (a) der Elektronenbeugung und (b) der Röntgenbeugung an einer dünnen Folie

Auch auch für Atome lässt sich der Wellencharakter mit Hilfe des in der Abbildung gezeigten Aufbaus nachweisen:

Angeregte He Atome werden beschleunigt und Ionisieren das Metall der Detektorfläche. Die entstehenden Ionen können nachgewiesen werden.

1.3 Materiewellen und Wellenfunktion

Analog zur Lichtwelle lassen sich **Materiewellen** mathematisch darstellen durch:

$$\psi(x, t) = C \cdot e^{i(\omega t - kx)} = C \cdot e^{i/\hbar(Et - px)} \quad (13)$$

Es gelten die Relationen:

$$E = \hbar\omega \quad \text{and} \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} \quad (14)$$

mit $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$. Anders als bei Licht zeigen die Materiewellen auch im Vakuum Dispersion. Aus $E = E_{\text{kin}} = p^2/2m$ ergibt sich die Phasengeschwindigkeit:

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} \quad (15)$$

Und somit die Dispersion:

$$\frac{dv_{\text{Ph}}}{d\omega} = \frac{1}{k} \neq 0. \quad (16)$$

Mit der Teilchengeschwindigkeit $v_T = p/m = \hbar k/m$ erhält man:

$$v_{Ph} = \frac{1}{2} v_T \quad (17)$$

1.3.1 Wellenpakete

- Durch Konstruktion von **Wellenpaketen** können den Materiewellen lokalisiert werden. Die Überlagerung von mehreren monochromatischen Wellen mit Amplituden C_j ergibt:

$$\psi(x, t) = \sum_j C_j \cdot e^{i(\omega_j t - k_j x)} \quad (18)$$

Die resultierenden ortsabhängigen Amplitudenmaxima bewegen sich mit der **Gruppengeschwindigkeit** $v_g = \Delta\omega/\Delta k$ in x -Richtung.

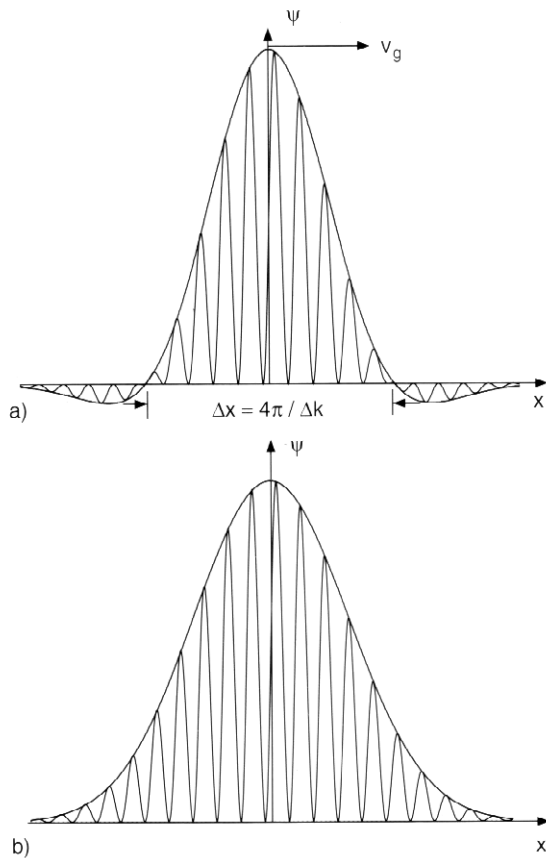


Abb. 3.25a,b. Wellenpaket als Überlagerung von unendlich vielen Wellen mit Frequenzen ω im Bereich $\omega_0 \pm \Delta\omega/2$ (a) mit konstanter Amplitude $C(k) = C(k_0)$ der Teilwellen, (b) mit gaußförmiger Verteilung der Amplituden

- Die Überlagerung unendlich vieler Wellen deren Frequenzen das Intervall

$$\omega_0 - \Delta\omega/2 \leq \omega \leq \omega_0 + \Delta\omega/2$$

ausfüllen, deren Wellenzahlen also im Intervall $k = k_0 \pm \Delta k/2$ liegen, geht die Summe in ein Integral über:

$$\psi(x, t) = \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} C(k) \cdot e^{i(\omega t - kx)} dk \quad (19)$$

Durch Entwicklung in eine Taylorreihe (für $\Delta k \ll k_0$):

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{d\omega}{dk}\right) \cdot (k - k_0) + \dots \quad (20)$$

und $C(k) \approx C(k_0)$ im engen Intervall Δk erhält man mit den Substitutionen $\kappa = k - k_0$ und $u = (d\omega/dk)_{k_0} \cdot t - x$:

$$\psi(x, t) = C(k_0) \cdot e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta k/2}^{+\Delta k/2} e^{i u \kappa} \cdot d\kappa = A(x, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \quad (21)$$

mit

$$A(x, t) = 2C(k_0) \frac{\sin(u \Delta k/2)}{u} \quad (22)$$

- Das Maximum dieses Wellenpaketes bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{p}{m} = v_T \quad (23)$$

in x -Richtung.

Das Wellenpaket als Beschreibung realer Partikel hat also folgende Vorteile:

- $v_g = v_T$
- Der Wellenvektor \mathbf{k}_0 des Gruppenzentrums bestimmt den Teilchenimpuls $\mathbf{p}_T = \hbar \mathbf{k}_0$.
- Das Wellenpaket ist lokalisiert

Allerdings:

- Die Wellenfunktion kann komplexe und negative Werte annehmen.
- Das Wellenpaket "verläuft im Laufe der Zeit, d.h. es wird breiter.
- Elementarteilchen wie Elektronen sind unteilbar, die oben beschriebene Welle kann aber z.B. durch einen Strahlteiler geteilt werden.

1.3.2 Statistische Deutung der Wellenfunktion

Als Ausweg aus dieser Situation schlug Max Born 1927 die statistische Deutung der Wellenfunktion vor:

- Die Wahrscheinlichkeit $W(x, t)$, dass sich ein Teilchen zur Zeit t im Ortsintervall von x bis $x + dx$ befindet, ist proportional zum Absolutquadrat $|\psi(x, t)|^2$ (der sog. **Wahrscheinlichkeitsdichte** der das Teilchen beschreibenden Materiewellenfunktion $\psi(x, t)$):

$$W(x, t) dx \propto |\psi(x, t)|^2 dx \quad (24)$$

- Es gilt ferner die Normierungsbedingung:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1, \quad (25)$$

wodurch (24) zu

$$W(x, t) dx = |\psi(x, t)|^2 dx \quad (26)$$

wird.

1.3.3 Heisenbergsche Unschäferelation

Sei ein eindimensionales um $k = k_0$ Gaussverteiltes Wellenpaket gegeben durch die Amplitudenverteilung:

$$C(k) = C_0 \exp \left[- \left(\frac{a}{2} \right)^2 (k - k_0)^2 \right]. \quad (27)$$

Damit wird das Wellenpaket zu

$$\psi(x, t) = C_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a/2)^2(k-k_0)^2} e^{i(kx-\omega t)} dk \quad (28)$$

Normierung und Durchführung der Integration liefert die Wahrscheinlichkeitsdichte für $t = 0$:

$$|\psi(x, 0)|^2 = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} e^{-2x^2/a^2} \quad (29)$$

- Das Wellenpaket hat bei $x = 0$ sein Maximum
- Für $x_{1,2} = \pm a/2$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte auf $1/\sqrt{e}$ ihres Maximalwertes abgesunken+
- Übliche Definition: $x_1 - x_2 = a$ heißt **volle Breite** des Wellenpakets.
- Aus (27) erhalten wir die entsprechende Breite $\Delta k = k_1 - k_2$ für die die Amplituden $|C(k_{1,2})|^2 = C_0/\sqrt{e}$ erfüllen zu $\Delta k = 1/a$.
Damit erhalten wir das bereits aus der Optik bekannte Ergebnis:

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1 \quad (30)$$

- Mit der de-Broglie Beziehung $p_x = \hbar k$ ergibt sich:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar \quad (31)$$

- Man kann zeigen, dass ein gaußförmiges Wellenpaket das minimale Produkt aus Orts- und Impulsbreite ergibt. Damit erhalten wir die **Heisenbergsche Unschäferelation**:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar \quad (32)$$

1.3.4 Das Auseinanderlaufen des Wellenpaketes

Der Anfangsimpuls eines Wellenpaketes kann nicht genauer als $p \pm \Delta p$ bestimmt werden. Daraus folgt eine Unschärfe der Gruppengeschwindigkeit des Wellenpaketes mit der ursprünglichen Breite x_0 :

$$\Delta v_g = \frac{1}{m} \Delta p = \frac{1}{m} \frac{\hbar}{\Delta x_0} \quad (33)$$

Wir erhalten daher ein linear mit der Zeit anwachsende Ortsunschärfe:

$$\Delta x(t) = \Delta v_g \cdot t = \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x_0} \cdot t. \quad (34)$$

Wegen der Normierung bleibt die Fläche unter dem Wellenpaket zu jeder Zeit jedoch gleich. Die Zunahme der Breits ist umso größer je kleiner die Anfangsbreite war, da sie proportional zu Impulsbreite ist. Das Gebiet in dem sich ein Teilchen aufhalten kann wird also im Laufe der Zeit größer.

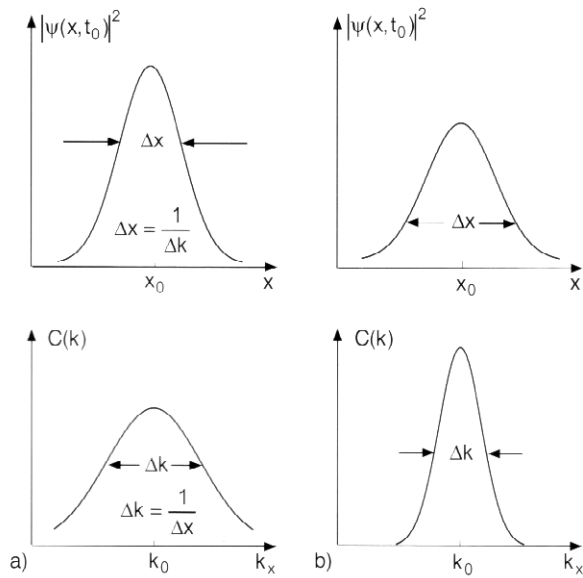


Abb. 3.29a,b. Darstellung der Unbestimmtheitsrelation durch die Orts- und Impulsunscharfen eines Wellenpaketes: (a) kleine Ortsunschärfe; (b) große Ortsunschärfe

1.3.5 Unbestimmtheitsrelation für Energie und Zeit

Die Frage wie genau sich die Energie $E = \hbar\omega_0$ der zentralen Frequenz in einem Zeitintervall Δt messen lässt ergibt sich analog zur Integration über den Wellenvektor k in (19).

$$\psi(x, t) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} C(\omega) \cdot e^{i(\omega t - \omega x)} d\omega. \quad (35)$$

Eine zu Abschnitt (1.3.3) völlig analoge Überlegung liefert für eine gaußförmige Frequenzverteilung die Energie-Zeit-Unschäferelation:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar. \quad (36)$$

Beispielaufgabe

Demtr. Kap. Aufgabe 2

a) Man zeige, daß Energie- und Impulserhaltungssatz nicht gleichzeitig erfüllt werden können, wenn ein freies Elektron bei der Geschwindigkeit v_1 ein Photon $h \cdot \nu$ absorbiert und sich danach mit der Geschwindigkeit $v_2 > v_1$ bewegt. Wieso werden beim Compton-Effekt beide Größen erhalten?

b) Wie groß ist der Impuls eines Photons bei $h \cdot \nu = 0,1 \text{ eV}$ (infrarot), 2 eV (sichtbar) und 2 MeV (γ -Strahlung)? Wie groß wäre jeweils die Geschwindigkeit eines H-Atoms mit gleichem Impuls?

a) Energiesatz:

$$h \cdot \nu = \Delta E_{\text{kin}}^{\text{el}} \quad (1)$$

$$= m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \right]$$

Impulssatz:

$$\hbar k = \frac{m_0 v_2}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} - \frac{m_0 v_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \hbar^2 k^2 = \frac{h^2 \nu^2}{c^2}$$

$$= \frac{m_0^2 v_1^2}{1 - v_1^2/c^2} + \frac{m_0^2 v_2^2}{1 - v_2^2/c^2} - \frac{2m_0^2 v_1 \cdot v_2}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}} \quad (3)$$

Andererseits folgt durch Quadrieren von (1)

$$h^2 \nu^2 = m_0^2 c^4 \left[\frac{1}{1 - v_1^2/c^2} + \frac{1}{1 - v_2^2/c^2} - \frac{2}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}} \right] \quad (4)$$

Vergleich von (3) und (4) liefert nach Umordnen

$$c^2 = \frac{c^2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\sqrt{(1 - v_1^2/c^2)(1 - v_2^2/c^2)}}$$

$$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 2\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \Rightarrow \nu = 0.$$

Eine Photonabsorption durch ein freies Elektron ist also nicht möglich. Bei der Absorption eines Photons durch ein Atomelektron nimmt das Atom den Rückstoß auf (siehe Abschn. 12.4). Beim Comptoneffekt übernimmt das gestreute Photon die Energie $h \cdot \nu_s$ und den Impuls $\hbar k_s$.

b) Für den Photonenimpuls gilt:

$$|\mathbf{p}_{\text{phot}}| = \frac{h \cdot \nu}{c}$$

$$h \cdot \nu = 0,1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$

$$\Rightarrow p_{\text{phot}} = \frac{1,6 \cdot 10^{-20} \text{ Js}}{3 \cdot 10^8 \text{ m}} = 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ N} \cdot \text{s}$$

$$h \cdot \nu = 2 \text{ eV} \Rightarrow p_{\text{phot}} = 1,07 \cdot 10^{-27} \text{ Ns}$$

$$h \cdot \nu = 2 \text{ MeV} \Rightarrow p_{\text{phot}} = 1,07 \cdot 10^{-21} \text{ Ns}$$

Ein Wasserstoffatom hätte die Geschwindigkeiten

$$v_1 = \frac{p}{m} = 3,2 \cdot 10^{-2} \text{ m/s} \text{ für } h\nu = 0,1 \text{ eV},$$

$$v_2 = \frac{p}{m} = 6,4 \cdot 10^{-1} \text{ m/s} \text{ für } h\nu = 2 \text{ eV},$$

$$v_3 = \frac{p}{m} = 6,4 \cdot 10^5 \text{ m/s} \text{ für } h\nu = 2 \text{ MeV}.$$