Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften

Experimentalphysik
Modul PH-EP4 / PH-DP-EP4

Script für Vorlesung 06. Juli 2009

12 Relativitätstheorie

Die Relativitätstheorie besteht aus zwei Teilen, wobei die spezielle Relativitätstheorie von 1905 Massen und Geschwindigkeiten in Relation setzt, die allgemeine Relativitätstheorie von 1916 jedoch die Beschleunigung von Massen und deren Gravitation beschreibt. Mathematisch ist die spezielle Relativitätstheorie recht einfach und sie findet z.B. in vielen elektronischen System Anwendung, bei denen sich Elektronen mit fast-Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die allgemeine Relativitätstheorie ist mathematisch sehr anspruchtsvoll und bei alltäglichen Anwendungen nicht von Bedeutung. Anwendungen finden sich jedoch in sehr vielen Fragestellungen der Kosmologie und z.B. beim GPS (Global Positioning System).

12.1 Das Newton'sche Relativitätsprinzip

Das erste Newton'sche Axion besagt, dass ein Teilchen seinen Bewegungszustand – Ruhe oder Geschwindigkeit – beibehält, wenn keine äußeren Kräfte wirken. Es gibt hierbei keinen Unterschied zwischen einem bewegten Teilchen oder einem Teilchen in Ruhe. Außerdem unterscheidet man nicht, ob sich ein Objekt von seinem Beobachter, der sich in Ruhe befindet, wegbewegt oder ob das Objekt in Ruhe ist und der Beobachter sich mit konstanter Geschwingkeit relativ zum Objekt bewegt.
Ein Satz von Koordinatensystemen, die sich relativ zueinander in Ruhe befinden, wird als **Bezugssystem** bezeichnet. Ein Bezugssystem, in dem die Newton'schen Axiome gelten, heißt **Inertialsystem**. Alle Bezugssysteme, die sich relativ zu einem Inertialsystem mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, sind ebenfalls Inertialsysteme. Bewegen sich zwei Inertialsysteme mit konstanter Geschwindigkeit relativ zueinander, gibt es kein mechanisches Experiment, das bestimmen kann, welches System sich bewegt oder sich in Ruhe befindet (**Newton'sches Relativitätsprinzip**). *Relative Bewegung kann man nicht messen*.
Im 19. Jahrhundert änderte sich die Ansicht zur Allgemeingültigkeit des Newton'schen Relativitätsprinzips und man vermutete, dass absolute Bewegung sich durch das Messen der Lichtgeschwindigkeit ermitteln lassen könnte.

12.1.1 Der Äther und die Lichtgeschwindigkeit

Wie in der Optik Vorlesung bereits behandelt wurde, hängt die Geschwindigkeit einer sich ausbreitenden Welle vom Medium ab. Bezieht man die Bewegung von Licht nun relativ zu einem anderen Objekt, was könnte dieses andere Bezugssystem oder Objekt sein? Was ist also das Pendant zur unbewegten Luft im Vakuum? Hierzu wurde der Äther als ein Medium eingeführt in dem sich das Licht bewegt. Man stellt sich hierbei vor, dass das gesamte Weltall von Äther gefüllt sei. Die Geschwindigkeit der Lichts relativ zum Äther sein $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.
1887 machten sich Michelson und Morley daran, die Geschwindigkeit des Lichts relativ zur Erde für zwei unterschiedliche Lichtstrahlen zu messen. Man konnte aber keine Laufzeitunterschiede feststellen. Auch nach vielen weiteren Experimenten konnte nie eine absolute Bewegung der Erde relativ zum Äther festgestellt werden.

12.2 Die Einstein'schen Postulate

1905 postulierte Einstein in seiner Veröffentlichung der speziellen Relativitätstheorie, dass es keinen Äther geben würde. Somit bestehe keine Möglichkeit eine absolute Geschwindigkeit zu messen. Die Erde kann als ruhend angesehen werden und die Lichtgeschwindigkeit ist damit in jede Richtig identisch. Die spezielle Relativitätstheorie beruht auf folgenden Postulaten:

1. Absolute, gleichförmige Bewegung kann man nicht messen.
2. Die Geschwindigkeit des Lichts ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Das erste Postulat ist nur eine Erweiterung des Newton'schen Relativitätsprinzips, das sich nur auf mechanische Messungen bezieht. Das zweite Postular beschreibt eine Eigenschaft, die allen Wellen gemeinsam ist. So hängt die Schallgeschwindigkeit auch nicht von der Bewegung der Schallquelle ab.
Viele Konsequenzen aus diesen Postulaten erscheinen merkwürdig und widersprechen der Anschauung. Eine Konsequenz ist z.B., dass alle Beobachter die selbe Lichtgeschwindigkeit messen, unabhängig von der relativen Geschwindigkeit zwischen Beobachter und Lichtquelle. Bewegt sich also ein Beobachter mit Geschwidigkeit v von der Lichtquelle weg, so misst er dennoch eine Lichtgeschwindigkeit von c und nicht $c+v$. Dies widerspricht den Beobachtungen im Alltag: Fährt man in einem Auto A mit $v_A = 30$ km/h und ein Auto B hinter A fährt mit $v_B = 40$ km/h, so nähert sich B an A mit einer Relativgeschwindigkeit von 10 km/h. Diese Addition von Geschwindigkeiten gilt beim Licht nicht (und andere Geschwindigkeiten nahe c) und man kann das zweite Postulat umschreiben in: Jeder Beobachter misst für die Lichtgeschwindigkeit c im Vakuum denselben Wert.

12.3 Die Lorentz-Transformation

Die Einstein'schen Postulate haben wichtige Konsequenzen für die Messung von Längen- und Zeitintervallen, sowie von Relativgeschwindigkeiten.

- Betrachte zwei Bezugssysteme S_A und S_B mit den kartesischen Koordinaten $x^{(A)}, y^{(A)}, z^{(A)}$ und Ursprung 0_A, und $x^{(B)}, y^{(B)}, z^{(B)}$ und Ursprung 0_B. Das Bezugssystem S_B soll sich mit konstanter Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_B^{(A)}$ relativ zu S_A bewegen. S_A bewegt sich demnach mit einer Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_A^{(B)} = -\boldsymbol{v}_B^{(A)}$ relativ zu S_B. Betrachte hier nur Bewegung von S_B in Richtung der positiven x-Achse des Bezugssystems S_A. Im Folgenden sollen allgemeine Beziehungen zwischen den Koordinaten und den Zeitpunkten $t^{(A)}$ eines Ereignisses, gemessen im Bezugssystem S_A und dem Zeitpunkt $t^{(B)}$ in S_B betrachtet werden.

- Seien die Ursprünge 0_A und 0_B zur Zeit $t^{(A)} = t^{(B)} = 0$ zusammengelegt, so ist die Beziehung der Koordinaten durch die **Galileo-Transformation** gegeben:

  $$x^{(A)} = x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}, \qquad y^{(A)} = y^{(B)}, \qquad z^{(A)} = z^{(B)}, \qquad t^{(A)} = t^{(B)}. \tag{1}$$

  Die inverse Transformation lautet

  $$x^{(B)} = x^{(A)} - v_B^{(A)} t^{(B)}, \qquad y^{(B)} = y^{(A)}, \qquad z^{(B)} = z^{(A)}, \qquad t^{(B)} = t^{(A)}. \tag{2}$$

  Diese Beziehungen gelten jedoch nur solange $c >> v$, da hierbei eine Geschwindigkeitsaddition zur Transformation des Bezugssystems durchgeführt wird.

- Für die relativistische Transformation nehmen wir an, dass die Transformationsgesetzte bis auf einen Faktor γ der klassischen Transformation entsprechen:

  $$x^{(A)} = \gamma(x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}). \tag{3}$$

Hier ist γ eine Konstante, die von $v_B^{(A)}$ und c abhängen kann, jedoch nicht von den Koordinaten. Die inverse Transformation lautet:

$$x^{(B)} = \gamma(x^{(A)} + v_B^{(A)} t^{(A)}). \tag{4}$$

- Betrachte nun einen Lichtblitz, der zum Zeitpunkt $t^{(A)} = 0$ im Ursprung von S_A startet. Mit der Annahme, dass die Ursprünge beider Bezugssytem zusammenfallen, startet der Lichtblitz auch in S_B zur Zeit $t^{(B)} = 0$. Man kann nun durch Rechnung zeigen, dass folgende Transformationsvorschriften zwischen den Bezugssystemen gelten:

$$x^{(A)} = \gamma(x^{(B)} + v_B^{(A)} t^{(B)}), \qquad y^{(A)} = y^{(B)}, \qquad z^{(A)} = z^{(B)}, \qquad t^{(A)} = \gamma\left(t^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x^B}{c^2}\right). \tag{5}$$

Die inverse Transformation lautet:

$$x^{(B)} = \gamma(x^{(A)} + v_B^{(A)} t^{(A)}), \qquad y^{(B)} = y^{(A)}, \qquad z^{(B)} = z^{(A)}, \qquad t^{(B)} = \gamma\left(t^{(A)} + \frac{v_B^{(A)} x^A}{c^2}\right). \tag{6}$$

Diese Transformationen heißen **Lorentz-Transformationen**. Sie stellen Beziehungen dar zwischen Orts- und Zeitkoordinaten eines Ereignisses betrachtet von zwei verschiedenen Bezugssystemen.

BEISPIEL 39.1: Räumliche und zeitliche Distanz zwischen zwei Ereignissen

Zwei Ereignisse finden in einem Bezugssystem S_B zu den Zeitpunkten $t_1^{(B)}$ und $t_2^{(B)}$ am selben Ort $x_0^{(B)}$ statt. Das Bezugssystem S_B bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ relativ zum Bezugssystem S_A. a) Wie groß ist die räumliche Distanz zwischen den Ereignissen im Bezugssystem S_A? b) Wie groß ist die zeitliche Distanz zwischen den Ereignissen im Bezugssystem S_A?

Problembeschreibung: Die räumliche Distanz im Bezugssystem S_A ist gegeben durch $x_2^{(A)} - x_1^{(A)}$, wobei $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ die Koordinaten der beiden Ereignisse im Bezugssystem S_A sind und mit Hilfe von Gleichung 39.9 berechnet werden können.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Die Ortskoordinate $x_1^{(A)}$ in S_A ergibt sich aus Gleichung 39.9: $\quad x_1^{(A)} = \gamma\,(x_0^{(B)} + v_B^{(A)}\,t_1^{(B)})$

2. Analog ergibt sich die Ortskoordinate $x_2^{(A)}$ in S_A zu: $\quad x_2^{(A)} = \gamma\,(x_0^{(B)} + v_B^{(A)}\,t_2^{(B)})$

3. Durch Subtraktion erhält man den räumlichen Abstand:

$$\Delta x^{(A)} = x_2^{(A)} - x_1^{(A)} = \gamma\, v_B^{(A)}\,(t_2^{(B)} - t_1^{(B)}) = \boxed{\frac{v_B^{(A)}\,(t_2^{(B)} - t_1^{(B)})}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Teilaufgabe b

Die Formel für die Zeitdilatation gibt uns die Beziehung zwischen den beiden Zeitintervallen an. Die beiden Ereignisse finden im Bezugssystem S_B am selben Ort statt, die Eigenzeit Δt_{eigen} zwischen den beiden Ereignissen ist also $\Delta t_{\text{eigen}} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$:

$$\Delta t^{(A)} = t_2^{(A)} - t_1^{(A)} = \gamma\,(t_2^{(B)} - t_1^{(B)}) = \boxed{\frac{(t_2^{(B)} - t_1^{(B)})}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

Kommentar: Dividiert man das Ergebnis aus Teilaufgabe a durch das Ergebnis aus Teilaufgabe b, so erhält man $\Delta x^{(A)}/\Delta t^{(A)} = v_B^{(A)}$. Die räumliche Distanz zwischen den beiden Ereignissen im Bezugssystem S_A entspricht also der Entfernung, die ein in S_B ortsfester Punkt (hier $x_0^{(B)}$) im Bezugssystem S_A in dem zu diesem Bezugssystem gehörenden Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen zurücklegt.

12.3.1 Zeitdilatation

- Betrachte zwei Ereignisse, die im Bezugssystem S_B zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_1^{(B)}$ und $t_2^{(B)}$ am selben Ort $x_0^{(B)}$ stattfinden. Die Zeiten dieser Ereignisse im Bezugssystem S_A sind demnach

$$t_1^{(A)} = \gamma\left(t_1^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x_0^{(B)}}{c^2}\right) \quad \text{und} \quad t_2^{(A)} = \gamma\left(t_2^{(B)} + \frac{v_B^{(A)} x_0^{(B)}}{c^2}\right). \tag{7}$$

Für das Zeitintervall gilt damit

$$t_2^{(A)} - t_1^{(A)} = \gamma(t_2^{(B)} - t_1^{(B)}). \tag{8}$$

- Die Zeit zwischen Ereignissen, die in einem Bezugssystem am selben Ort stattfinden, heißt **Eigenzeit** t_{eigen}. Das Zeitintervall $\Delta t_{\text{eigen}} = t_2^{(B)} - t_1^{(B)}$, gemessen im Bezugssystem S_B, ist eine solche Eigenzeit. Das entsprechende Zeitintervall Δt in einem beliebigen anderen Bezugssystem ist stets größer als die Eigenzeit. Diese Dehnung bezeichnet man als **Zeitdilatation**: $\Delta t = \gamma \Delta t_{\text{eigen}}$. Diese Konsequenz aus der speziellen Relativitätstheorie ist noch einmal anhand eines Beispiels in Abbildung 1 verdeutlicht.

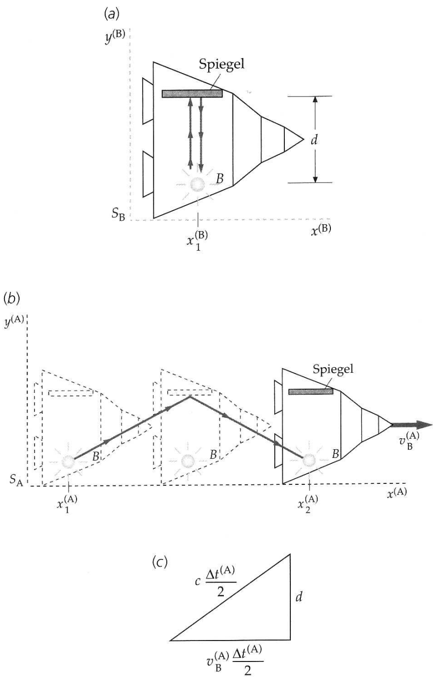

Abbildung 1: a) Der Beobachter B und der Spiegel befinden sich in einem Raumschiff, das im Bezugssystem S_B in Ruhe ist. Die Zeit, die der Lichtblitz für den Weg zum Spiegel und wieder zurück braucht, wird vom Beobachter B zu $2d/c$ gemessen. b) Im Bezugssystem S_A bewegt sich das Raumschiff mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ nach rechts. Ist die Lichtgeschwindigkeit in beiden Bezugssystemen gleich, so ist die Laufzeit des Lichts in S_A länger als $2d/c$, da die zurückgelegte Entfernung länger als $2d$ ist. c) Rechtwinkliges Dreieck zur Berechnung der Zeit $\Delta t^{(A)}$ im Bezugssystem S_A.

12.3.2 Längenkontraktion

- Ein ähnliches Phänomen aus der speziellen Relativitätstheorie ist die **Längenkontraktion**. Die Länge eines Objekts in einem Bezugssystem, in dem sich das Objekt in Ruhe befindet, heißt **Eigenlänge** l_{eigen}. In jedem Bezugssystem, in dem sich das Objekt bewegt, ist die dort bemessene Länge kürzer als die Eigenlänge.

- Sei $l_{\text{eigen}} = x_2^{(B)} - x_1^{(B)}$ die Eigenlänge eines ruhenden Stabs im Bezugssystem S_B. Wird nun die Länge des Stabs in einem anderen Bezugssystem S_A gemessen, wobei sich der Stab mit

BEISPIEL 39.2: Wie lange dauert ein einstündiges Schläfchen?

Ein Raumschiff bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 0{,}6$ relativ zur Erde. Die in dem Raumschiff befindlichen Astronauten melden sich für eine Stunde bei ihrer Bodenstation ab, um ein Schläfchen zu halten, versprechen aber, sich gleich danach zurückzumelden. Wie lange dauert das einstündige Schläfchen im Bezugssystem der Erde?

ZUR ÜBUNG

Problembeschreibung: Da die Astronauten in ihrem Bezugssystem am selben Ort einschlafen, an dem sie auch aufwachen, ist das Zeitintervall von einer Stunde, das sie messen, die Eigenzeit. Im Bezugssystem der Erde dagegen legen die Astronauten zwischen den beiden Ereignissen eine beträchtliche Entfernung zurück. Das Zeitintervall, das im Bezugssystem der Erde gemessen wird (und zwar mit zwei an den Orten der Ereignisse installierten Uhren), ist um den Faktor γ länger.

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuche Sie jeweils die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte	Ergebnisse
1. Schreiben Sie die Formel für die Beziehung zwischen dem Zeitintervall Δt, wie es auf der Erde gemessen wird, und dem Eigenzeitintervall Δt_{eigen} auf.	$\Delta t = \gamma\, \Delta t_{\text{eigen}}$
2. Berechnen Sie γ für $\beta = 0{,}6$.	$\gamma = 1.25$
3. Setzen Sie diesen Wert ein, und Sie erhalten die Dauer des einstündigen Schläfchens im Bezugssystem der Erde.	$\Delta t = \gamma\, \Delta t_{\text{eigen}} = \boxed{1.25\ \text{h}}$

ÜBUNG: Wie lange würde das einstündige Schläfchen im Bezugssystem der Erde dauern, wenn sich das Raumschiff mit der Geschwindigkeit $\beta = 0{,}8$ bewegte? (*Lösung:* 1,67 h.)

der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ des Bezugssystems S_B bewegt, so ergibt sich für die gemessene Länge

$$l = \frac{1}{\gamma}\, l_{\text{eigen}}. \tag{9}$$

Man nennt die Längenkontraktion auch **Lorentz-FitzGerald-Kontraktion**.

BEISPIEL 39.3: Die Länge eines sich bewegenden Meterstabs

Ein Stab mit einer Eigenlänge von 1 m bewegt sich in Richtung seiner Länge mit der Geschwindigkeit $v_{\text{B}}^{(\text{A})}$ relativ zu einem Beobachter. Entsprechend den Messungen des Beobachters beträgt die Länge des Stabs 0,914 m. Wie groß ist die Geschwindigkeit $v_{\text{B}}^{(\text{A})}$?

Problembeschreibung: Da ℓ und ℓ_{eigen} gegeben sind, kann man $v_{\text{B}}^{(\text{A})}$ direkt aus Gleichung 39.14 bestimmen.

Lösung:

1. Gleichung 39.14 gibt den Zusammenhang zwischen den Längen ℓ und ℓ_{eigen} und der Geschwindigkeit $v_{\text{B}}^{(\text{A})}$ an:

$$\ell = \ell_{\text{eigen}} \sqrt{1 - \left(\frac{v_{\text{B}}^{(\text{A})}}{c}\right)^2}$$

2. Auflösen nach $v_{\text{B}}^{(\text{A})}$ ergibt:

$$v_{\text{B}}^{(\text{A})} = c\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{\ell_{\text{eigen}}^2}} = c\sqrt{1 - \frac{(0{,}914\ \text{m})^2}{(1\ \text{m})^2}} = \boxed{0{,}406\, c}$$

12.3.3 Der relativistische Doppler-Effekt

- Die bekannten Formeln für den Doppler-Effekt sind für Licht nicht gültig, da es keinen Unterschied macht, ob die Lichtquelle relativ zum Beobachter oder der Beobachter sich relativ zur Lichtquelle bewegt. Die Annahme bei dem klassischen Doppler-Effekt ist die, dass Zeitintervalle im Bezugssystem der Lichtquelle und im Bezugssystem des Beobachters als identisch angenommen werden, was für Licht nicht der Fall ist.

- Eine Quelle bewege sich mit der Relativgeschwindigkeit $v_B^{(A)}$ auf einen Beobachter zu. Sie emittiert im Zeitintervall $\Delta t^{(A)}$, gemessen im Bezugssystem des Beobachters, n Wellenberge einer Lichtquelle. Während der erste Wellenberg in diesem Zeitintervall die Strecke

$c\,\Delta t^{(A)}$ zurücklegt, bewegt sich die Quelle um die Strecke $v_B^{(A)}\,\Delta t^{(A)}$ auf den Beobachter zu (gemessen im Bezugssystem des Beobachters). Die Wellenlänge der vom Beobachter empfangenen Welle ist daher

$$\lambda^{(A)} = \frac{c\Delta t^{(A)} - v_B^{(A)}\Delta t^{(A)}}{n}. \tag{10}$$

Die vom beobachter gemessene Frequenz $\nu^{(A)}$ der Welle ist somit

$$\nu^{(A)} = \frac{c}{\lambda^{(A)}} = \frac{c}{c - v_B^{(A)}}\frac{n}{\Delta t^{(A)}} = \frac{1}{1-\beta}\frac{n}{\Delta t^{(A)}}. \tag{11}$$

Ist die Frequenz der Welle im Ruhesystem der Quelle gleich $\nu^{(B)}$, so emittiert die Quelle im Zeitintervall $\Delta t^{(B)}$, gemessen im Bezugssystem der Quelle, $n = \nu^{(B)}\,\Delta t^{(B)}$ Wellenberge. Daher gilt

$$\nu^{(A)} = \frac{1}{1-\beta}\frac{n}{\Delta t^{(A)}} = \frac{1}{1-\beta}\frac{\nu^{(B)}\Delta t^{(B)}}{\Delta t^{(A)}} = \frac{\nu^{(B)}}{1-\beta}\frac{\Delta t^{(B)}}{\Delta t^{(A)}}. \tag{12}$$

Dabei ist $\Delta t^{(B)}$ das Eigenzeitintervall, denn alle Wellenberge vom ersten bis zum n-ten werden im Bezugssystem der Quelle am selben Ort emittiert. Die Zeitintervalle $\Delta t^{(B)}$ und $\Delta t^{(A)}$ sind durch die Zeitdilatation miteinander verbunden:

$$\Delta t^{(A)} = \gamma\Delta t^{(B)} = \frac{\Delta t^{(B)}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{13}$$

- Somit ist die Frequenz der Welle für den Fall, dass sich Quelle und Beobachter aufeinander zu bewegen, gegeben durch

  $$\nu^{(A)} = \frac{\nu^{(B)}}{1-\beta}\frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta}\nu^{(B)} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu^{(B)} \tag{14}$$

  für kleiner werdenden Abstand.

- Für größer werdenden Abstand gilt (ohne Beweis)

  $$\nu^{(A)} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu^{(B)}. \tag{15}$$

- Führt man die Rechnung im Bezugssystem der Quelle durch, so kommt man genau zu den gleichen Ergebnissen!

- Ein Beispiel für den relativistischen Doppler-Effekt ist die Rotverschiebung im Licht, das von fernen Galaxien beobachtet wird. Aufgrund der Expansion des Universums bewegen sich diese Galaxien von der Erde fort, was man im Lichtspektrum durch Verschiebung in den langwelligen roten Bereich messen kann. Hierdurch kann die Geschwindigkeit relativ zur Erde ermittelt werden.

BEISPIEL 39.5: Berechnung der Geschwindigkeit einer fernen Galaxie aus der Rotverschiebung

Das langwelligste Licht der Balmer-Serie von Wasserstoff hat die Wellenlänge $\lambda^{(B)} = 656$ nm. Im Licht einer fernen Galaxie wird die Wellenlänge dieser Linie zu $\lambda^{(A)} = 1458$ nm gemessen. Wie groß ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Galaxie von der Erde weg bewegt?

ZUR ÜBUNG

Lösung:

Decken Sie zunächst die rechte Spalte ab und versuchen Sie jeweils, die Ergebnisse selbst zu ermitteln.

Schritte	**Ergebnisse**
1. Gleichung 39.16 b gibt den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$ und der ausgesandten Frequenz $\nu^{(B)}$ und der empfangenen Frequenz $\nu^{(A)}$ an.	$\nu^{(A)} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,\nu^{(B)}$
2. Setzen Sie $\nu^{(A)} = c/\lambda^{(A)}$ und $\nu^{(B)} = c/\lambda^{(B)}$ ein und lösen Sie nach β auf.	$\beta = \frac{1-(\lambda^{(B)}/\lambda^{(A)})^2}{1+(\lambda^{(B)}/\lambda^{(A)})^2} = 0{,}664$ $v_B^{(A)} = \boxed{0{,}664\,c}$

12.4 Uhrensynchronisation und Gleichzeitigkeit

Wie bereits oben beschrieben, kann die Eigenzeit, die das Zeitintervall zwischen zwei Ereignissen ist, die in einem Bezugssystem am selben Ort stattfinden, mit einer einzigen Uhr gemessen werden. In einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt, finden dieses Ereignisse jedoch an unterschiedlichen Orten statt. Man braucht daher zwei Uhren, um die Zeitpunkte der Ereignisse zu messen. Das Zeitintervall ergibt sich dann durch Subtraktion der mit den verschiedenen Uhren gemessenen Zeitpunkte. Voraussetzung ist die **Synchronisation** der Uhren. Die Sychronisation der Uhren besagt:

Zwei Uhren, die in einem Bezugssystem synchronisiert sind, gehen in einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt, typischerweise nicht synchron.

Als Folgerung ergibt sich:

Zwei Ergebnisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, finden in einem anderen Bezugssystem, das sich relativ zum ersten bewegt, typischerweise nicht gleichzeitig statt.

Definition der Gleichzeitigkeit:

Zwei Ereignisse finden in einem Bezugssystem gleichzeitig statt, wenn die von den Ereignissen ausgesandten Lichtsignale einen Beobachter, der sich in der Mitte zwischen den Ereignissen befindet, zur selben Zeit erreichen.

Werden zwei Uhren in einem Ruhesystem synchronisiert, so sind sie in einem anderen Bezugssystem typischerweise nicht synchron. In dem Bezugssystem, in dem sich die Uhren entlang der Verbindungslinie zwischen den beiden Uhren bewegen, geht die führende Uhr um den Betrag $\Delta t = \Delta x_{eigen} = v_B^{(A)}/c^2$ vor, wobei Δx_{eigen} der Eigenabstand der Uhren ist.

12.4.1 Das Zwillingsparadoxon

Homer und Odysseus seien eineiige Zwillinge. Während Homer auf der Erde bleibt, reist Odysseus mit hoher Geschwindigkeit zu einem Planeten weit jenseits des Sonnensystems und kehrt anschließend zur Erde zurück. Welcher Zwilling ist älter? Dieses Problem ist über Jahrzehnte hinweg Gegenstand vieler Diskussionen gewesen, obwohl die Antwort, dass der zuhause ge-

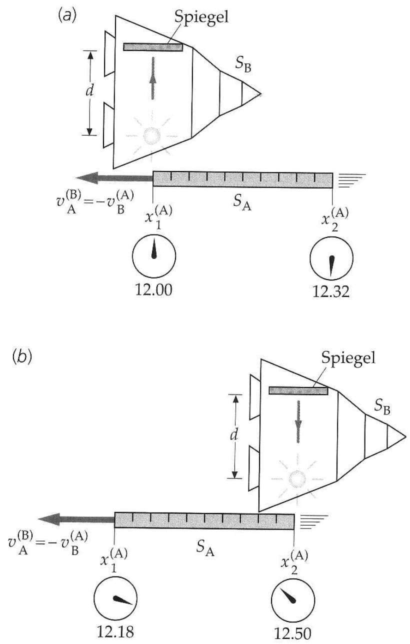

Abbildung 2: Die Uhren auf dem Bahnsteig aus Sicht des Beobachters im Bezugssystem S_B des Raumschiffs. Während des Zeitintervalls von $\Delta t^{(B)} = 30\,\text{min}$, in dem der Bahnsteig am Raumschiff vorüberzieht, vergehen auf den Uhren auf dem Bahnsteig nur $(30\text{ min})/\gamma = 18$ min; sie gehen also langsamer. Aber da die Uhren nicht synchron sind – die führende Uhr geht um den Betrag $\Delta x_{\text{eigen}}\beta/c$ vor, was in diesem Fall 32 min entspricht –, beträgt die im Bezugssystem des Bahnsteigts gemessene Zeit, die das Raumschiff braucht, um vom Punkt $x_1^{(A)}$ zum Punkt $x_2^{(A)}$ zu gelangen, 32 min + 18 min = 50 min.

bliebene Zwilling älter ist, kaum bezweifelt wurde. Das Problem stellt scheinbar ein Paradoxon dar, weil die Zwillinge allen Anschein nach symmetrischen Rollen spielen, der Alterungsprozess jedoch assymetrisch verläuft. Das Paradoxon lässt sich lösen, wenn man bedenkt, dass die Rolle der Zwillinge in Wirklichkeit ebenfalls asymmetrisch ist.

Die mit dem Zwillingsparadoxon verknüpften Vorhersagen der speziellen Relativitätstheorie wurden an instabilen geladenen Teilchen überprüft, die so hoch beschleunigt werden können, dass γ (siehe Zeitdilatation) viel größer als 1 ist. Die Teilchen lassen sich durch ein Magnetfeld in einer Kreisbahn einfangen, und ihre Lebensdauer kann mit denen identischer Teilchen in Ruhe verglichen werden. In einem solchen Experiment leben die beschleunigten Teilchen, wie von der speziellen Relativitätstheorie vorhergesagt, im Mittel länger als die ruhenden Teilchen. Darüber hinaus konnte man die Vorhersagen durch ein Experiment bestätigen, in dem sehr präzise Atomuhren in Verkehrsflugzeugen um die Welt geflogen wurden. Hierbei müssen allerdings Gravitationseffekte berücksichtigt werden, wie sich durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben werden.

BEISPIEL 39.6: Synchronisation von Uhren

In einem Raumschiff befinden sich ein Beobachter mit einer Signallampe und ein Spiegel in der Anordnung, wie sie in Abbildung 39.3 gezeigt ist. Die Entfernung zwischen der Lampe und dem Spiegel beträgt $d = 15$ Lichtminuten ($15\ c \cdot \text{min}$). Das Raumschiff, das im Bezugssystem S_B in Ruhe ist, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 0{,}8$ relativ zu einem sehr langen Weltraumbahnsteig, der im Bezugssystem S_A in Ruhe ist. Zu dem Zeitpunkt, da der Beobachter im Raumschiff seinen Lichtblitz aussendet, passiert das Raumschiff gerade den Ort $x_1^{(A)}$ auf dem Bahnsteig; zu dem Zeitpunkt, da das vom Spiegel reflektierte Signal den Beobachter wieder erreicht, befindet sich das Raumschiff am Ort $x_2^{(A)}$. Die Orte $x_1^{(A)}$ und $x_2^{(A)}$ auf dem Bahnsteig sind mit synchronisierten Uhren ausgestattet. Wie groß ist das Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen (Aussenden und Wiedereintreffen des Lichtblitzes) a) im Bezugssystem des Raumschiffs und b) im Bezugssystem des Bahnsteigs? c) Welche Entfernung legt das Raumschiff zwischen den beiden Ereignissen zurück? d) Aus Sicht des Beobachters im Raumschiff sind die beiden Uhren auf dem Bahnsteig nicht synchron. Um wie viel geht die führende Uhr vor?

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Im Bezugssystem des Raumschiffs läuft der Lichtblitz von der Lampe zum Spiegel und wieder zurück. Die gesamte vom Lichtblitz zurückgelegte Strecke hat also die Länge $2d = 30\ c \cdot \text{min}$. Dafür benötigt das Licht die Zeit $2d/c$:

$$\Delta t^{(B)} = \frac{2d}{c} = \frac{30\ c \cdot \text{min}}{c} = 30\ \text{min}$$

2. Da die beiden Ereignisse am selben Ort im Raumschiff stattfinden, handelt es sich bei diesem Zeitintervall um die Eigenzeit:

$$\Delta t_{\text{eigen}} = \boxed{30\ \text{min}}$$

Teilaufgabe b

1. Im Bezugssystem S_A ist die Zeit zwischen den beiden Ereignissen um den Faktor γ länger:

$$\Delta t^{(A)} = \gamma\, \Delta t_{\text{eigen}} = \gamma \cdot (30\ \text{min})$$

2. Der Wert für γ beträgt:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}8)^2}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}36}} = \frac{5}{3}$$

3. Mit diesem Wert für γ ergibt sich das Zeitintervall zwischen den beiden Ereignissen im Bezugssystem S_A zu:

$$\Delta t^{(A)} = \gamma\, \Delta t_{\text{eigen}} = \frac{5}{3} \cdot (30\ \text{min}) = \boxed{50\ \text{min}}$$

Teilaufgabe c

Im Bezugssystem S_A legt das Raumschiff zwischen den beiden Ereignissen die Strecke $\beta\, c\, \Delta t^{(A)}$ zurück:

$$x_2^{(A)} - x_1^{(A)} = \beta\, c\, \Delta t^{(A)} = (0{,}8\, c) \cdot (50\ \text{min}) = \boxed{40\ c \cdot \text{min}}$$

Teilaufgabe d

1. Der Betrag, um den die führende Uhr vorgeht, bestimmt sich aus dem Eigenabstand Δx_{eigen} zwischen den Uhren:

$$\Delta t = \Delta x_{\text{eigen}} \frac{\beta}{c}$$

2. Die in Teilaufgabe c berechnete Entfernung entspricht dem Eigenabstand der beiden Uhren auf dem Bahnsteig:

$$\Delta x_{\text{eigen}} = x_2^{(A)} - x_1^{(A)} = 40\ c \cdot \text{min}$$

und somit

$$\Delta t = \Delta x_{\text{eigen}} \frac{\beta}{c} = (40\ c \cdot \text{min}) \cdot \frac{0{,}8}{c} = \boxed{32\ \text{min}}$$

Kommentar: Aus Sicht eines Beobachters auf dem Bahnsteig gehen die Uhren im Raumschiff langsamer, da sie nur 30 min als Zeit zwischen den beiden Ereignissen verzeichnen, wohingegen die Zeit, die der Beobachter auf dem Bahnsteig misst, 50 min beträgt.

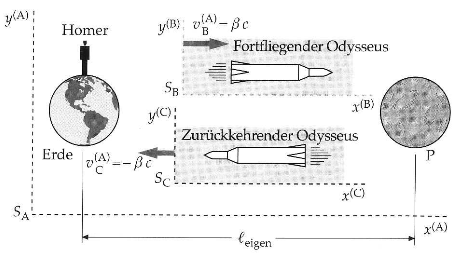

Abbildung 3: Das Zwillingsparadoxon. Die Erde und der Planet P ruhen im Bezugssystem S_A. Odysseus ruht auf dem Weg zum Planeten im Bezugssystem S_B und auf dem Rückweg im Bezugssystem S_C. Sein Zwillingsbruder Homer bleibt auf der Erde. Bei seiner Rückkehr ist Odysseus jünger als sein Bruder. Die Rollen, die die Zwillinge spielen, sind nicht symmetrisch: Homer bleibt in einem Inertialsystem, während Odysseus beschleunigen muss, um nach Hause zurückkehren zu können.