Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften

Experimentalphysik
Modul PH-EP4 / PH-DP-EP4

Script für Vorlesung 09. Juli 2009

12 Relativitätstheorie – Fortsetzung

12.5 Die Geschwindigkeitstransformation

- Durch Differenziation der Ortskoordinaten der im letzte Skript eingeführten Lorentz-Transformation ergibt sich, wie sich die Geschwindigkeiten beim Übergang von einem Bezugssystem in ein anderes ändern. Für ein Teilchen, dass sich im Bezugssystem S_B gewegt, gilt für die Geschwindigkeit in x-Richtung: $v_x^{(B)} = \mathrm{d}x^{(B)}/\,\mathrm{d}t^{(B)}$. Es bewegt sich relativ zu S_A mit der Geschwindigkeit $v_B^{(A)}$. Die Geschwindigkeit im Bezugssystem S_A lautet $v_x^{(A)} = \mathrm{d}x^{(A)}/\,\mathrm{d}t^{(A)}$.

- Wendet man nun die Lorentz-Transformationsgleichungen an und berechnet zunächst $\mathrm{d}x^{(A)}$ und $\mathrm{d}t^{(A)}$, so erhält man schließlich den vollständigen Satz an Gleichungen für die relativistische Geschwindigkeitstransformation:

$$v_x^{(A)} = \frac{v_x^{(B)} + v_B^{(A)}}{1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2}, \tag{1}$$

$$v_y^{(A)} = \frac{v_y^{(B)}}{\gamma\left(1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2\right)}, \tag{2}$$

$$v_z^{(A)} = \frac{v_z^{(B)}}{\gamma\left(1 + v_B^{(A)} v_x^{(B)}/c^2\right)}. \tag{3}$$

- Die inversen Transformationsgleichungen lauten:

$$v_x^{(B)} = \frac{v_x^{(A)} - v_B^{(A)}}{1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)}/c^2}, \tag{4}$$

$$v_y^{(B)} = \frac{v_y^{(A)}}{\gamma\left(1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)}/c^2\right)}, \tag{5}$$

$$v_z^{(B)} = \frac{v_y^{(A)}}{\gamma\left(1 - v_B^{(A)} v_x^{(A)}/c^2\right)}. \tag{6}$$

  Für $\beta << 1$ und $v_x^{(B)} << c$ (d.h. $\gamma \approx 1$) gehen die Transformationsvorschriften über in die klassischen Ausdrücke, also $v_x^{(A)} = v_x^{(B)} + v_B^{(A)}$, $v_y^{(A)} = v_y^{(B)}$ und $v_z^{(A)} = v_z^{(B)}$.

- Allgemein lässt sich zeigen, dass ein Massenpunkt, der sich mit einer Geschwindigkeit kleiner c bewegt, auch in jedem anderen Bezugssystem eine Geschwindigkeit kleiner c besitzt, wenn die Geschwindigkeit des zweiten Bezugssystems relativ zum ersten kleiner c ist.

- Um ein Teilchen auf Lichtgeschwindigkeit zu beschleunigen müsste eine unendlich hohe Energie aufgewendet werden. c ist also eine nicht erreichbare Obergrenze der Geschwindigkeit aller Teilchen mit Masse. Im Gegensatz dazu gibt es masselose Teilchen wie das Phonon, das sich immer mit Lichtgeschwindigkeit bewegt.

BEISPIEL 39.7: Relativgeschwindigkeit bei nichtrelativistischen Geschwindigkeiten

Ein Überschallflugzeug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 1000 m/s (etwa dreifacher Schallgeschwindigkeit) entlang der x-Achse eines Bezugssystems, in dem sich ein Beobachter in Ruhe befindet. Ein zweites Flugzeug bewegt sich ebenfalls entlang der x-Achse und relativ zum ersten mit der Geschwindigkeit 500 m/s. Wie groß ist die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeugs relativ zum Beobachter?

Problembeschreibung: Die Geschwindigkeiten der beiden Flugzeuge sind im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit so klein, dass wir erwarten dürfen, dass die klassische Formel für die Geschwindigkeitsaddition auf das korrekte Ergebnis führt. Um dies zu zeigen, berechnen wir den Korrekturterm im Nenner von Gleichung 39.18 a. Bezeichne S_{A} das Ruhesystem des Beobachters und S_{B} ein Bezugssystem, das sich mit der Geschwindigkeit $v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})} = 1000\ \mathrm{m/s}$ entlang der x-Achse des Bezugssystems S_{A} bewegt. Dann befindet sich das erste Flugzeug im Bezugssystem S_{B} in Ruhe, während das zweite Flugzeug in diesem Bezugssystem die Geschwindigkeit $v_x^{(\mathrm{B})} = 500\ \mathrm{m/s}$ hat.

Lösung:

1. Seien S_{A} und S_{B} die Ruhesysteme des Beobachters und des ersten Flugzeugs und $v_x^{(\mathrm{A})}$ und $v_x^{(\mathrm{B})}$ die Geschwindigkeiten des zweiten Flugzeugs relativ zu S_{A} bzw. S_{B}. Die Geschwindigkeit des ersten Flugzeugs relativ zum Beobachter ist $v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}$. Dann kann die Geschwindigkeit $v_x^{(\mathrm{A})}$ mit Hilfe von Gleichung 39.18 a berechnet werden:

$$v_x^{(\mathrm{A})} = \frac{v_x^{(\mathrm{B})} + v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}}{1 + v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}\, v_x^{(\mathrm{B})}/c^2}$$

2. Ist der Korrekturterm im Nenner vernachlässigbar, so geht Gleichung 39.18 a in die klassische Formel für die Geschwindigkeitsaddition über. Die Größe des Korrekturterms beträgt:

$$\frac{v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}\, v_x^{(\mathrm{B})}}{c^2} = \frac{1000 \cdot 500}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-12}$$

3. Diese Korrektur ist so klein, dass das klassische und das relativistische Ergebnis praktisch übereinstimmen:

$$v_x^{(\mathrm{A})} \approx v_x^{(\mathrm{B})} + v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})} = 500\ \mathrm{m/s} + 1000\ \mathrm{m/s} = \boxed{1500\ \mathrm{m/s}}$$

BEISPIEL 39.8: Relativgeschwindigkeit bei relativistischen Geschwindigkeiten

Was ändert sich in Beispiel 39.7, wenn das erste Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von $\beta = 0{,}8$ relativ zum Beobachter fliegt und die Relativgeschwindigkeit zwischen dem zweiten und dem ersten Flugzeug ebenfalls $\beta = 0{,}8$ beträgt?

Problembeschreibung: Diese Geschwindigkeiten sind nicht klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit $\beta = 1$, daher verwenden wir die relativistische Formel (Gleichung 39.18 a). Wir nehmen wieder an, dass der Beobachter im Bezugssystem S_{A} ruht und das erste Flugzeug im Bezugssystem S_{B} in Ruhe ist, welches sich mit der Geschwindigkeit $v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})} = 0{,}8\,c$ relativ zum Beobachter bewegt. Die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeugs in S_{B} ist $v_x^{(\mathrm{B})} = 0{,}8\,c$.

Lösung:

Die Geschwindigkeit des zweiten Flugzeugs relativ zum Beobachter ergibt sich aus Gleichung 39.18 a:

$$v_x^{(\mathrm{A})} = \frac{v_x^{(\mathrm{B})} + v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}}{1 + v_{\mathrm{B}}^{(\mathrm{A})}\, v_x^{(\mathrm{B})}/c^2} = \frac{0{,}8\,c + 0{,}8\,c}{1 + (0{,}8)^2} = \frac{1{,}6\,c}{1{,}64} = \boxed{0{,}98\ c}$$

12.6 Der relativistische Impuls

- In der klassischen Mechanik gilt für den Impuls eines Teilchen $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$. In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls des Systems konstant. In der speziellen Relativitätstheorie ist $\sum m_i \boldsymbol{v}_i$ keine Erhaltungsgröße.

- Beispiel: Beobachter A sei im Bezugssystem S_A. Beobachter B befindet sich in S_B, das sich mit $v_B^{(A)}$ relativ zu S_B bewegt. Beide Beobachter haben Bälle der identischen Ruhemasse m. Einer der Beobachter wirft den Ball mit Geschwindigkeit $-v = v_{2,y}^{(B)}$ senkrecht nach unten, der andere wirft seinen Ball mit derselben Geschwindigkeit $v = v_{1,y}^{(A)}$ senkrecht nach oben. Beide Bälle stoßen elastisch zusammen, wenn jeder die Strecke l zurückgelegt hat. Nach dem klassischen Verständnis haben beide Bälle den Vertikalimpuls vom Betrag mv. Die Vertikalkomponente des Gesamtimpulses ist null.

Nach der speziellen Relativitätstheorie dagegen haben die Vertikalkomponenten der Geschwindigkeiten der beiden Bälle vom Bezugssystem der Beobachter aus gesehen nicht den gleichen Betrag und sind nicht entgegengesetzt gerichtet aufgrund der Bewegung der Bezugssysteme relativ zueinander. Es gilt daher keine Erhaltung des klassischen Impulses.

- Definiere relativistischen Impuls $\boldsymbol{p}$ eines Teilchens so, dass die folgenden Forderungen erfüllt sind:

  1. Bei Stößen bleibt der Impuls $\boldsymbol{p}$ erhalten.
  2. Geht v/c gegen null, so strebt $\boldsymbol{p}$ gegen $m\boldsymbol{v}$.

Bei dem o.g. Beispiel bleibt der **relativistische Impuls** erhalten. Er wird beschrieben durch

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma m\boldsymbol{v}. \tag{7}$$

Diese Gleichung gilt ganz allgemein. Sie lässt sich so interpretieren, dass die Masse eines Objekts anwächst, wenn sich die Geschwindigkeit erhöht. Die Größe $m_{rel} = \gamma m$ ist die **relativistische Masse**. Die **Ruhemasse** eines Teilchens ist seine relativistische Masse in einem Bezugssystem, in dem das Teilchen ruht. Beide Massenbegriffe werden im Folgenden synonym verwendet und mit m bezeichnet.

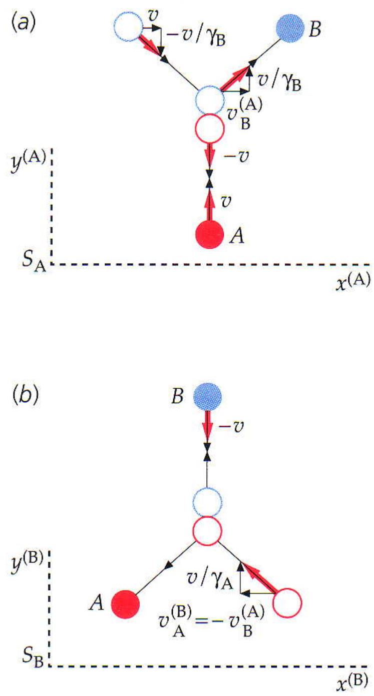

Abbildung 1: a) Der elastische Stoß von zwei identischen Bällen aus Sicht eines Beobachters im Bezugssystem S_A. Ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente des Balls 2 im Bezugssystem S_B gleich v, so ist sie im Bezugssystem S_A gleich v/γ_B. b) Derselbe Stoß aus Sicht eines Beobachters im Bezugssystem S_B. In diesem Bezugssystem hat der Ball 1 die vertikale Geschwindigkeitskomponente v/γ_a mit $\gamma_A = \gamma_B = 1/\sqrt{1-\left(v_B^{(A)}/c\right)^2}$.

12.7 Die relativistische Energie

- In der klassischen Mechanik ist die Arbeit, die durch die resultierende Kraft an einem Teilchen verrichtet wird, gleich der Änderung der kinetischen Energie des Teilchens. Zur Bestimmung der relativistischen Energie muss zunächst die resultierende Kraft mit der zeitlichen Änderung des relativistischen Impulses bestimmt werden. Danach kann die durch die Kraft verrichtete Arbeit berechnet werden und damit die Änderung der kinetischen Energie.

- Analog zur relativistischen Korrektur des klassischen Impulses zur Bestimmung des relativistischen Impulses folgt für die relativistische Energie (ohne Beweis):

$$E_{kin} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - mc^2 = mc^2(\gamma - 1). \tag{8}$$

  Der erste Term hängt von der Geschwindigkeit des Teilchens ab, während der zweiter Term geschwindigkeitsunabhängig ist und die **Ruheenergie** beschreibt: $E_0 = mc^2$. Beispiel: Die Ruheenergie des Photons ist null.

- Die **relativistische Gesamtenergie** ist die Summe aus kinetischer Energie und Ruheenergie:

$$E = E_{kin} + mc^2 = \gamma mc^2. \tag{9}$$

- Die von einer unkompensierten Kraft verrichtete Arbeit bewirkt eine Erhöhung der Energie von der Ruheenergie auf die Endenergie $\gamma mc^2 = m_{rel}c^2$ mit der relativistischen Masse $m_{rel} = \gamma m$.

Beispiel 39.11: Gesamtenergie, kinetische Energie und Impuls

Betrachten wir ein Elektron (Ruheenergie 0,511 MeV), das sich mit der Geschwindigkeit $\beta = 0{,}8$ bewegt. Wie groß sind a) seine Gesamtenergie, b) seine kinetische Energie und c) sein Impuls?

Lösung:

Teilaufgabe a

Die Gesamtenergie berechnet sich nach Gleichung 39.24 zu:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{0{,}511\ \text{MeV}}{\sqrt{1-0{,}64}} = \frac{0{,}511\ \text{MeV}}{0{,}6} = \boxed{0{,}852\ \text{MeV}}$$

Teilaufgabe b

Die kinetische Energie ergibt sich als Differenz aus Gesamtenergie und Ruheenergie:

$$E_{\text{kin}} = E - mc^2 = 0{,}852\ \text{MeV} - 0{,}511\ \text{MeV} = \boxed{0{,}341\ \text{MeV}}$$

Teilaufgabe c

Die Größe des Impulses kann mit Gleichung 39.20 berechnet werden. Wir können die Rechnung vereinfachen, indem wir Zähler und Nenner mit c^2 multiplizieren und das Ergebnis aus Teilaufgabe a verwenden:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{\beta}{c} = (0{,}852\ \text{MeV}) \cdot \frac{0{,}8}{c} = \boxed{0{,}681\ \text{MeV}/c}$$

Kommentar: Statt in Teilaufgabe c Zähler und Nenner mit c^2 zu multiplizieren, hätten wir auch direkt Gleichung 39.25 verwenden können.

12.7.1 Masse und Energie

- Die Gleichung $E_0 = mc^2$ verbindet Energie und Trägheit miteinander. So findet man z.B. häufig bei radioaktiven Zerfällen, dass Masse in kinetische Energie umgewandelt wird, wie bereits in den vorangegangenen Kapiteln besprochen.

- Jedes stabile Teilchen, das aus mehreren Teilchen zusammengesetzt ist, wie z.B. ein Deuteriumkern oder ein Heliumkern, zeichnet sich dadurch aus, dass seine Masse bzw. Ruheenergie kleiner ist als die Summe der Massen bzw. Ruheenergien seiner Bestandteile. Die Differenz entspricht der Bindungsenergie.
- Beispiel: Vollständig inelastischer Stoß zweier Teilchen. Im klassischen Sinne geht hierbei kinetische Energie verloren. Relativistisch betrachtet bedeutet der Verlust an kinetischer Energie eine Erhöhung der Ruheenergie, d.h. eine Massenerhöhung.

BEISPIEL 39.12: Ein vollständig inelastischer Stoß

Ein Teilchen mit der Masse 2 MeV/c^2 und der kinetischen Energie 3 MeV kollidiert mit einem ruhenden Teilchen der Masse 4 MeV/c^2. Nach dem Stoß bleiben die beiden Teilchen miteinander verbunden. Berechnen Sie a) den Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß, b) die Geschwindigkeit des Zweiteilchensystems nach dem Stoß und c) die Masse des Zweiteilchensystems.

Problembeschreibung: a) Der Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß entspricht dem Anfangsimpuls des stoßenden Teilchens, der aus der Gesamtenergie des Teilchens berechnet werden kann. b) Die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoß lässt sich aus der Gesamtenergie und dem Impuls berechnen, indem man die Beziehung $\beta = pc/E$ verwendet (Gleichung 39.25). Die Gesamtenergie ergibt sich dabei aufgrund der Energieerhaltung, der Impuls aufgrund der Impulserhaltung. c) Wenn die Gesamtenergie und der Impuls nach dem Stoß bekannt sind, kann die Masse des Systems nach dem Stoß über $E^2 = p^2c^2 + (mc^2)^2$ berechnet werden.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Der Gesamtimpuls des Systems vor dem Stoß entspricht dem Anfangsimpuls des stoßenden Teilchens. Der Impuls eines Teilchens ist mit der Energie und der Masse des Teilchens verknüpft (Gleichung 39.27):

$$E_1^2 = p_1^2c^2 + (m_1c^2)^2$$
$$p_1c = \sqrt{E_1^2 - (m_1c^2)^2}$$

2. Die Gesamtenergie des stoßenden Teilchens ist gleich der Summe aus kinetischer Energie und Ruheenergie:

$$E_1 = 3\ \text{MeV} + 2\ \text{MeV} = 5\ \text{MeV}$$

3. Damit ergibt sich für den Impuls:

$$p_1c = \sqrt{E_1^2 - (m_1c^2)^2} = \sqrt{(5\ \text{MeV})^2 - (2\ \text{MeV})^2} = \sqrt{21\ (\text{MeV})^2}$$
$$p_1 = \boxed{4{,}58\ \text{MeV}/c}$$

Teilaufgabe b

1. Die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoß kann aus der Gesamtenergie E_E und dem Impuls p_E nach dem Stoß berechnet werden, indem man Gleichung 39.25 anwendet:

$$\beta_E = \frac{p_E c}{E_E}$$

2. Aufgrund der Energieerhaltung ist die Gesamtenergie des Systems nach dem Stoß gleich der Gesamtenergie der beiden Teilchen vor dem Stoß:

$$E_E = E_A = E_1 + E_2 = 5\ \text{MeV} + 4\ \text{MeV} = 9\ \text{MeV}$$

3. Aufgrund der Impulserhaltung ist der Impuls des Zweiteilchensystems nach dem Stoß gleich dem Anfangsimpuls:

$$p_E = \boxed{4{,}58\ \text{MeV}/c}$$

4. Nun kann man die Geschwindigkeit des Zweiteilchensystems mit der Formel $\beta = pc/E$ berechnen:

$$\beta_E = \frac{p_E c}{E_E} = \frac{4{,}58\ \text{MeV}}{9\ \text{MeV}} = 0{,}509$$
$$v_E = \boxed{0{,}509\ c}$$

Teilaufgabe c

Die Masse m_E des Zweiteilchensystems nach dem Stoß ergibt sich aus Gleichung 39.27 mit $p_E c = 4{,}58$ MeV und $E_E = 9$ MeV:

$$E_E^2 = (p_E c)^2 + (m_E c^2)^2$$
$$(9\ \text{MeV})^2 = (4{,}58\ \text{MeV})^2 + (m_E c^2)^2$$
$$m_E = \boxed{7{,}75\ \text{MeV}/c^2}$$

Kommentar: Beachten Sie, dass sich die Gesamtmasse des Systems von 6 MeV/c^2 auf 7,75 MeV/c^2 erhöht. Das Produkt aus dem Massenzuwachs und c^2 entspricht, wie die folgende Übung zeigt, gerade dem Verlust des Systems an kinetischer Energie.

12.8 Die allgemeine Relativitätstheorie

Die allgemeine Relativitätstheorie ist eine sehr anspruchsvolle mathematische Formulierung von Gravitation und Beschleunigung. Hier sollen nur einige wenige Inhalte und Konsequenzen angesprochen werden.

- Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie ist das **Äquivalenzprinzip**:
Ein homogenes Gravitationsfeld ist zu einem gleichmäßig beschleunigten Bezugssystem völlig äquivalent.

- Dieses Prinzip ist in ähnlicher Weise schon in der Newton'schen Mechanik enthalten, in der zwischen schwerer und träger Masse unterschieden wird. In einem Gravitationsfeld erfahren alle Körper unabhängig von ihrer Masse dieselbe Beschleunigung $\boldsymbol{a}_G$, da die Gravitationskraft proportional ist zur schweren Masse. Im Gegensatz dazu ist die Beschleunigung umgekehrt proportional zur trägen Masse. Beispiel: Eine Raumkapsel befindet sich weit weg von einem Gravitationsfeld. Wenn sie beschleunigt wird, kann im Inneren der Kapsel durch kein mechanisches Experiment nachgewiesen werden, ob die zu spürende Kraft durch Beschleunigung oder Gravitation verursacht wird.

- Eine Konsequenz des Äquivalenzprinzips ist die Ablenkung des Lichts in einem Gravitationsfeld. In einem Raumgebiet ohne Gravitation bewegt sich das Licht geradlinig mit Geschwindigkeit c. Solch ein Raumgebiet kann entsprechend das Innere in einer Raumkapsel sein, die sich im freien Fall befindet (hierbei wirkt keine Kraft auf die Astronauten, sie sind schwerelos). Betrachte Lichtstrahl, der auf solch eine frei-fallende Kapsel trifft. Da die Kapsel beschleunigt wird, vergrößert sich die zurückgelegte Distanz in jedem Zeitintervall (siehe Abbildung). Aus Sicht des Astronauten im Inneren der Kapsel beschreibt das Licht daher eine Parabel. Nach dem Äquivalenzprinzip gibt es jedoch keine Möglichkeit, zwischen dem beschleunigten Volumen und einem in einem gleichförmigen Gravitationsfeld ruhenden bzw. sich gleichförmig bewegenden Volumen zu unterscheiden.

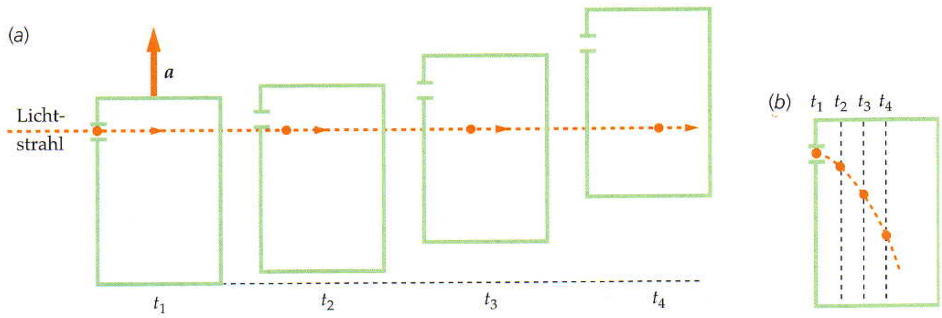

Abbildung 2: a) Lichtstrahl, der sich geradlinig durch eine Kapsel bewegt, die relativ zu einem in der Nähe befindlichen Bezugssystem im freien Fall gleichmäßig beschleunigt wird. Eingezeichnet sind die Positionen des Lichtstrahls zu gleich weit auseinander liegenden Zeitpunkten t_1, t_2, t_3, t_4. b) Im Bezugssystem der Kapsel bewegt sich der Lichtstrahl entlang einer parabolischen Bahn, wie es ein hozizontal geworfener Ball tun würde. Die Vertikalbewegung ist in beiden Teilbildern zur Verdeutlichung stark übertrieben dargestellt.

- Eine Konseqenz des Äquivalenzprinzips ist also, dass das Licht im Gravitationsfeld beschleunigt wird, z.B. um den Faktor 9,81 m/s^2 auf der Erde. 1919 konnte dieser Effekt bei einer Sonnenfinsternis nachgewiesen werden, in dem man die Ablenkung der Lichtstrahlen durch die Sonne beobachtete.

- Eine weitere Folgerung aus der allgemeinen Relativitätstheorie betrifft die Änderung von Zeitintervallen und Lichtfrequenzen in einem Gravitationsfeld. Wie bereits bekannt ist, ist die potenzielle Energie zweiter Massen m und m_1 im Abstand r:

$$E_{pot} = -\Gamma \frac{mm_1}{r}, \tag{10}$$

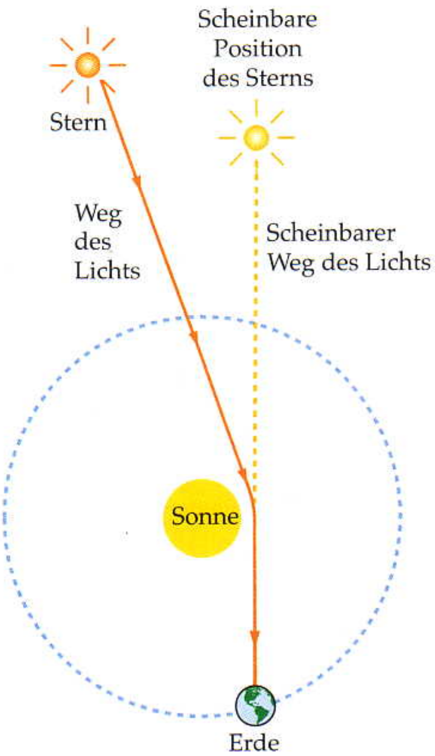

Abbildung 3: Die (stark übertrieben dargestellte) Ablenkung eines Lichtstrahls durch das Gravitationsfeld der Sonne.

wobei Γ die Gravitationskonstante ist. Die potenzielle Energie pro Masse m im Gravitationsfeld heißt **Gravitationspotenzial** ϕ

$$\phi = -\Gamma \frac{m}{r}. \tag{11}$$

- Das Zeitintervall Δt_1 zwischen zwei Ereignissen sei mit einer Uhr gemessen worden, die sich an einem Punkt mit dem Gravitationspotenzial ϕ_1 befindet. Δt_2 sei das Zeitintervall zwischen denselben zwei Ereignissen, aber mit einer anderen Uhr an einem Punkt mit Gravitationspotenzial ϕ_2 gemessen. Die allgemeine Relativitätstheorie sagt für die Differenz der Zeitintervalle folgende Beziehung voraus:

$$\frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{\Delta t} = \frac{1}{c^2}(\phi_2 - \phi_1). \tag{12}$$

  Entsprechend der allgemeinen Relativitätstheorie gehen Uhren in Gebieten mit niedrigerem Gravitationspotenzial langsamer als eine Uhr in einem Gebiet mit höherem (also betragsmäßig kleinerem) Gravitationspotenzial.

- Beispiel: Die Frequenz des Lichts ist in einem Gebiet mit niedrigem Potenzial, z.B. in der Nähe der Sonne, kleiner als in einem Gebiet mit höherem Potenzial, z.B. in der Nähe der Erde. Diese Verschiebung zu einer kleineren Frequenz und damit größeren Wellenlänge heißt **Gravitationsrotverschiebung**.

- Als letztes Beispiel für die Vorhersagen der allgemeinen Relativitätstheorie soll hier kurz auf die **Schwarzen Löcher** eingegangen werden, deren Existenz erstmals 1939 von Oppen-

heimer und Snyder vorhergesagt wurde. Entsprechend der allgemeinen Relativitätstheorie kann die Gravitationskraft bei Körpern extrem hoher Dichte, z.B. bei Sternen extrem großer Massen am Ende ihrer Entwicklung, so groß sein, dass innerhalb eines kritischen Radius nichts, was dort einmal hingelangt, je wieder entweichen kann, nicht einmal Licht oder andere Strahlung. Eine Eigenschaft dieser Löcher ist, dass keinerlei Informationen aus dem Inneren nach außen gelangen kann (was teilweise durch S. Hawking in seiner Theorie über die Thermodynamik Schwarzer Löcher vor wenigen Jahren revidiert wurde).
Entsprechend der Newton'schen Mechanik ist die Fluchtgeschwindigkeit eines Teilchens von der Oberfläche eines Planeten oder Sterns mit der Masse m und dem Radius r gegeben durch:

$$v_F = \sqrt{2\Gamma \frac{m}{r}}. \tag{13}$$

Setzte die Fluchtgeschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit gleich und löse nach r auf, so erhält man den **Schwarzschild-Radius**, innerhalb dessen auch Licht nicht mehr dem Schwarzen Loch entweichen kann:

$$r_s = -2\Gamma \frac{m}{c^2}. \tag{14}$$

Das kleinstmögliche Scharze Loch, das bei dem Kollaps eines Sterns entstehen kann, hat die fünffache Sonnenmasse und damit einen Radius von 15 km. Schwarze Löcher sind schwer zu beobachten, da sie keine Strahlung aussenden. Sie verraten sich aber durch die starke Gravitationskraft, die von ihnen ausgeht und auf andere Himmelskörper wirkt. So befindet sich im Zentrum der Milchstraße vermutlich ein Scharzes Loch der Masse von ca. 2,000,000 Sonnenmassen, das durch das extreme Gravitationsfeld alle Sterne der Milchstraße anzieht.