

Minitest 8

- Zeichne 4 stehende Wellen, die auf einer Gitarre entstehen können!
- Durch welche mathematischen Funktionen lassen sich diese Wellen beschreiben?

TIRF-Mikroskopie

TIRF-Mikroskopie (Total internal reflection fluorescence microscopy) ist eine Methode der Fluoreszenzmikroskopie, um Strukturen zu untersuchen, die sich sehr nahe (ca. 200 nm) an Kontaktfläche der Probe befinden. Dadurch ergibt sich ein deutlich höherer Kontrast, da nur wenig Material zur Fluoreszenz angeregt wird, was dadurch erreicht wird, dass man den Objektträger von hinten und in einem Winkel bestrahlt wird, der groß genug ist, damit Totalreflexion auftritt. Da die Strahlung aber dennoch in den Objektträger eindringt, aber dabei gleichzeitig mit zunehmenden Weg immer stärker abgeschwächt wird (sog. evaneszente Welle), erreicht sie nur wenige Schichten fluoreszierenden Materials.

Rastertunnelmikroskop

Das **Rastertunnelmikroskop** (abgekürzt **RTM**, oder **STM** von englisch *scanning tunneling microscope*) ist ein Mikroskop, das in der Oberflächenphysik und Oberflächenchemie eingesetzt wird, um die Oberfläche einer Probe abzubilden. Die Rastertunnelmikroskopie unterscheidet sich von den länger bekannten und verwendeten oberflächensensitiven Beugungsmethoden wie z. B. der Beugung langsamer Elektronen (LEED) dadurch, dass sie ein „*reales*“ Abbild der Probenoberfläche erzeugt (Abbildung im Ortsraum). Dadurch kann die Rastertunnelmikroskopie, im Gegensatz zu den Beugungsmethoden (die im inversen Raum abbilden), auch nicht-periodische, lokale Strukturen – wie z. B. Oberflächendefekte und Nanostrukturen – sichtbar machen.

Bei der rastertunnelmikroskopischen Messung wird eine elektrisch leitende Spitze (auch Nadel) systematisch (in einem *Raster*) über das ebenfalls leitende Untersuchungsobjekt gefahren. Die Spitze und die Objektoberfläche sind dabei nicht in elektrischem Kontakt, und wegen des isolierenden Mediums dazwischen (Luft oder Vakuum) findet bei makroskopischem Abstand kein kontinuierlicher Stromfluss statt. Nähert man jedoch die Spitze der Oberfläche auf atomare Größenordnungen (Nanometer) an, so überlagern sich die quantenmechanischen Zustände der Elektronen (Orbitale) von Oberfläche und Spitze, so dass mit einer Wahrscheinlichkeit größer Null ein Austausch von Elektronen auftritt, was bei Anlegen einer kleinen Spannung zu einem Tunnelstrom (Tunneleffekt) führt. Dieser Tunnelstrom ist sehr empfindlich auf kleinste Abstandsänderungen, da die Intensität negativ exponentiell mit dem Abstand skaliert. Beim Abrastern der Probenoberfläche wird die Höhe der Spitze mittels einer Feinmechanik (Piezoelemente) so geregelt, dass der Tunnelstrom entlang der Bewegung konstant bleibt. Damit fährt die Spitze ein „Höhenprofil“ der Oberfläche nach, wobei das Höhen-Regelsignal zur Darstellung der Probenoberfläche benutzt wird. Die Rastertunnelmikroskopie ist ein indirektes Abbildungsverfahren, da das Gesamtbild einer Messung aus den an jedem Rasterpunkt gemessenen und in Graustufen umgerechneten Werten des Höhen-Regelsignals zusammengesetzt wird.

Da das Prinzip der Rastertunnelmikroskopie auf der Messung eines Stromflusses zwischen der Probe und der Spitze des Rastertunnelmikroskops beruht, können nur elektrisch leitende Proben (Metalle, Halbleiter oder Supraleiter) direkt untersucht werden. Nicht leitende Proben zeigen zwar ebenfalls Tunnelphänomene, der Tunnelstrom kann jedoch nicht durch die Probe an die Gegenkathode gelangen und gemessen werden. Daher müssen sie vorher mit einer feinen elektrisch leitenden Schicht bedampft werden (Graphit, Chrom oder Gold), welche am Rand der Probe Kontakt zur Probenhalterung hat. Eine weitere Möglichkeit ist die Untersuchung sehr dünner Schichten eines Isolators auf einem leitenden Substrat.

Die durch konstanten Tunnelstrom gewonnenen Abbildungen entsprechen allerdings nicht zwangsweise der Topographie der Oberfläche. Vielmehr wird hierbei vorrangig die elektronische Struktur der Oberfläche abgetastet. Alternativ kann auch der Abstand der Spitze zur Oberfläche konstant gehalten werden, und durch die Variation des Tunnelstromes eine Rekonstruktion der Oberfläche aufgezeichnet werden. Letztere Methode ist empfindlicher auf elektronische Oberflächeneffekte als auf geometrische, und durch den Vergleich beider Bilder kann die Abweichung Topographie - Elektronenstruktur abgeschätzt werden.

Das erste erfolgreiche Experiment zum Nachweis eines abstandsabhängigen Tunnelstromes konnte am 18. März 1981 im IBM-Forschungslabor in Rüschlikon (CH) durchgeführt werden. Die beiden Physiker Gerd Binnig (Deutschland) und Heinrich Rohrer (Schweiz), die das Experiment durchführten und das Rastertunnelmikroskop letztlich auch zum einsetzbaren Instrument machten, erhielten hierfür 1986 den Nobelpreis für Physik. Ferner waren auch Christian Gerber und E. Weibel an der Entwicklung beteiligt.

Quantenpunkt

Ein **Quantenpunkt** (engl. *quantum dot*) ist eine nanoskopische Materialstruktur, meist aus Halbleitermaterial (z. B. InGaAs, CdSe oder auch GaInP/InP). Ladungsträger (Elektronen, Löcher) in einem Quantenpunkt sind in ihrer Beweglichkeit in allen drei Raumrichtungen so weit eingeschränkt, dass ihre Energie nicht mehr kontinuierliche, sondern nur noch diskrete Werte annehmen kann (siehe Größenordnung/Spektrum). Quantenpunkte verhalten sich also ähnlich wie Atome, jedoch kann ihre Form, Größe oder die Anzahl von Elektronen in ihnen beeinflusst werden. Dadurch lassen sich elektronische und optische Eigenschaften von Quantenpunkten maßschneidern. Typischerweise beträgt ihre eigene atomare Größenordnung etwa 10^4 Atome. Gelingt es, mehrere einzelne Quantenpunkte in unmittelbarer Nähe zueinander anzuordnen, so dass Ladungsträger (v.a. Elektronen) über Tunnelprozesse von einem in den nächsten Quantenpunkt hüpfen können, so spricht man von Quantenpunktmolekülen.

Die Größe des Quantenpunkts liegt im Bereich der De-Broglie-Wellenlänge des Elektrons, weil hier die Quanteneigenschaften zu Tage treten. Der Quantenpunkt bildet einen Potentialtopf, der ein quantenmechanisches Confinement darstellt, d. h. eine stärkere Lokalisierung der Wellenfunktion bewirkt.

Aufgrund der zuvor bestimmten Größe des Quantenpunktes bilden sich atomähnliche Zustände. Der Übergang vom klassischen Bändermodell der Halbleiterphysik zu den quantisierten Energieniveaus niederdimensionaler Festkörper ist dabei kontinuierlich und von der Stärke des Einschlusses bzw. der Beschränkung (engl: 'confinement') der Wellenfunktion des im Quantenpunkt befindlichen Ladungsträgers oder genauer, dessen Wellenfunktion abhängig.

Die Schrödingergleichung und kugelsymmetrische Probleme

kugelsymmetrisches Potential $V(r) = f(r) \Rightarrow$

Kugelkoordinaten:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

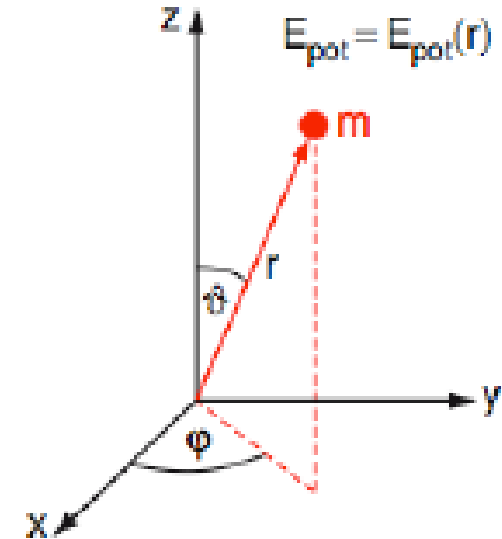
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\varphi = \arctan y/x$$



$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \psi = 0$$

Produktansatz: $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \cdot \phi(\varphi)$

$$\frac{\sin^2 \vartheta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \vartheta}{\Theta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) r^2 \sin^2 \vartheta = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2}$$

von φ abhängt:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \phi(\varphi) = -C_1 \cdot \phi(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \phi(\varphi) = A \cdot e^{\pm \sqrt{C_1} \varphi}$$

Bedingung, dass $\phi(\varphi)$ periodisch auf 2π sein soll

$$\sqrt{C_1} = m \quad m \in \{ \dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots \}$$

$$\phi_m(\varphi) = A \cdot e^{im\varphi} \quad \text{mit } A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

umsortieren nach Termen:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\bar{m}}{\hbar^2} r^2 (E - V(r)) = -\frac{1}{\theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} \equiv C_2$$

für $\theta(\vartheta)$

$$\frac{1}{\theta \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) + \frac{m^2}{\sin^2 \vartheta} = C_2 \quad \begin{array}{l} \text{Legendre Differentialgleichung} \\ \xi = \cos \vartheta \end{array}$$

assoziertes Legendrepolynom

$$\theta_l^m(\xi) = P_l^m(\cos \vartheta) = \text{const} \cdot (1 - \xi^2)^{|m/2|} \frac{d^{|m|}}{d\xi^{|m|}} (P_l(\xi))$$

$$P_l(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d\xi^l} (\xi^2 - 1)^l \quad l\text{-te Legendrepolynom}$$

Werte der Quantenzahl l und der Quantenzahl m

$$-l \leq m \leq +l$$

Radialfunktion $R(r)$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2\tilde{m}}{\hbar^2} r^2 (E - V(r)) - l \cdot (l + 1) \right] R(r) = 0$$

winkelabhängigen Funktionen $\phi_m(\varphi)$ und $\theta_l^m(\vartheta)$

$$Y_l^m(\vartheta, \varphi) = P_l^m(\cos \vartheta) \cdot \phi_m(\varphi) \quad \text{Kugelflächenfunktion}$$

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = A \cdot R_l(r) \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$$

l	m	Y_l^m
0	0	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$
1	± 1	$\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$
	0	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \vartheta$
2	± 2	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}$
	± 1	$\mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$
	0	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$
3	± 3	$\mp \frac{1}{8} \sqrt{\frac{35}{\pi}} \sin^3 \vartheta e^{\pm 3i\varphi}$
	± 2	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{105}{2\pi}} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}$
	± 1	$\mp \frac{1}{8} \sqrt{\frac{21}{\pi}} \sin \vartheta (5 \cos^2 \vartheta - 1) e^{\pm i\varphi}$
	0	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta)$

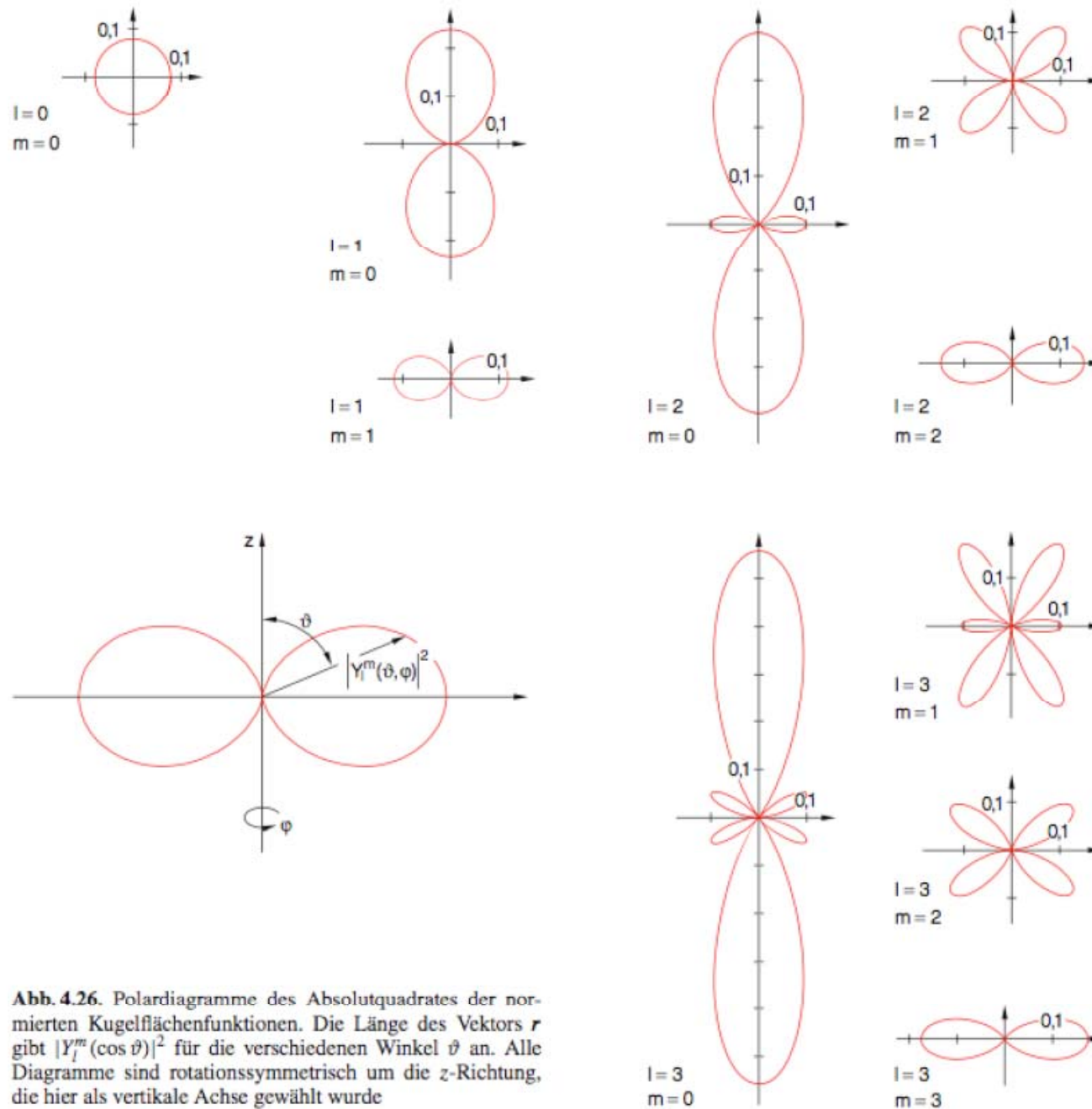


Abb. 4.26. Polardiagramme des Absolutquadrates der normierten Kugelflächenfunktionen. Die Länge des Vektors r gibt $|Y_l^m(\cos \vartheta)|^2$ für die verschiedenen Winkel ϑ an. Alle Diagramme sind rotationssymmetrisch um die z -Richtung, die hier als vertikale Achse gewählt wurde