

Experimentalphysik Modul PH-EP4 / PH-DP-EP4

Zusammenfassung für Vorlesung 9 (7. Mai 2009), SS 2009

4 Das Wasserstoffatom

Demtröder *Exp. Phys.* 3, Kap. 5

- Für das H-Atom als einfachstes aller Atome bzw. Einelektronensystem ist die Schrödingergleichung (Elektron der Masse m im Coulombfeld des Kerns) exakt lösbar.
- Die Fein- oder Hyperfeinstruktur seiner Spektren sowie der anomale Zeeman-Effekt lassen sich jedoch nur durch Einführung neuer Eigenschaften wie Kern- und Elektronenspin beschreiben und können durch eine relativistische Theorie berücksichtigt werden.
- In diesem Kapitel werden alle Phänomene, die bei Einelektronensystemen auftreten können, anhand des H-Atoms behandelt.

4.1 Schrödingergleichung für Einelektronenatome

Demtröder *Exp. Phys.* 3, Kap. 5.1.

- Die Schrödingergleichung für Einelektronensysteme (Elektron mit Ladung $-e$ und Masse m_1 , Kern mit Ladung $+Z \cdot e$ und Masse m_2) lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \Delta_1 \Psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \Delta_2 \Psi - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Psi = E\Psi(r_1^{\vec{r}}, r_2^{\vec{r}}) \quad (1)$$

- Die Wellenfunktion $\Psi(r_1^{\vec{r}}, r_2^{\vec{r}})$ hängt von sechs Koordinaten für Kern und Elektron ab.

4.1.1 Trennung von Schwerpunkt- und Relativbewegung

Demtröder *Exp. Phys.* 3, Kap. 5.1.1

- Wie in der klassischen Mechanik kann in der Quantenmechanik die Bewegung eines Systems von Teilchen in die Bewegung seines Schwerpunkts und die Bewegung der Teilchen gegeneinander getrennt werden.
- Wenn man die Koordianten des Schwerpunkts S mit $\vec{R} = \frac{m_1 r_1^{\vec{r}} + m_2 r_2^{\vec{r}}}{M}$, wobei $M = m_1 + m_2$, $\vec{R} = \{X, Y, Z\}$ und $\vec{r} = r_1^{\vec{r}} - r_2^{\vec{r}} = \{x, y, z\}$ annimmt, so lässt sich zeigen, dass die Schrödingergleichung sich in

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \Psi + E_{pot}(r)\Psi = E\Psi \quad (2)$$

überführen lässt, wobei $\mu = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$ die reduzierte Masse ist.

- Verwendung des Ansatzes $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot g(\vec{R})$ wird als Lösung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{\Delta_R g}{g} + \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\Delta_r f}{f} \right] + E_{pot}(r) = E \quad (3)$$

erhalten.

- Für die Relativbewegung von Kern und Elektron lässt sich nach einigen Schritten unter Umbenennung von $f(\vec{r})$ in $\psi(\vec{r})$ sowie Δ_r in Δ hieraus die Schrödingergleichung in der Form

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta \psi + E_{pot}(r) \psi = E \psi \quad (4)$$

erhalten. Diese Gleichung ist bis auf die reduzierte Masse μ identisch mit der Schrödingergleichung eines Teilchens im kugelsymmetrischen Potential $\phi(r)$. Durch die Separation dieser Gleichung in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) wurden als Lösungen der abseparierten Azimutal- und Polargleichungen die Winkelanteile $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ der Wellenfunktion

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_l^m(\vartheta, \varphi) \quad (5)$$

gefunden. Für das Elektron im Coulombfeld des Kerns sind also (i) die Radialgleichung für die Funktion $R(r)$ zu lösen und (ii) die Energieeigenwerte zu bestimmen.

4.1.2 Lösung der Radialgleichung

Demtröder Exp. Phys. 3, Kap. 5.1.2

- Analog zu einem Teilchen im kugelsymmetrischen Potential $\phi(r)$ (hier: $m \rightarrow \mu$ und $C_2 = l(l+1)$) erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - E_{pot}(R)) R(r) = \frac{l(l-1)}{r^2} R(r) \quad (6)$$

mit dem Drehimpuls $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar$ in Bezug auf den Ursprung $\vec{r} = 0$ am Atomkern. Daraus ergibt sich mit dem Coulombpotential:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \left[\frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r} \right) - \frac{l(l-1)}{r^2} R(r) \right] = 0 \quad (7)$$

Im Grenzfall $r \rightarrow \infty$ erhält man daraus die Gleichung

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} = \frac{2\mu}{\hbar^2} E \cdot R \quad (8)$$

deren Lösungen das asymptotische Verhalten der Radialfunktion $R(r)$ beschreiben.

- Die Funktion $W(r) = r \cdot R(r)$ wird eingeführt, um über $4\pi |W|^2 dr$ die Wahrscheinlichkeit anzugeben, mit der sich ein Elektron zwischen r und $r + dr$ im Abstand r vom Kern aus zu finden ist. Es ergibt sich

$$W(r \rightarrow \infty) = \frac{A}{r} \cdot e^{ikr} + \frac{B}{r} \cdot e^{-ikr} \quad (9)$$

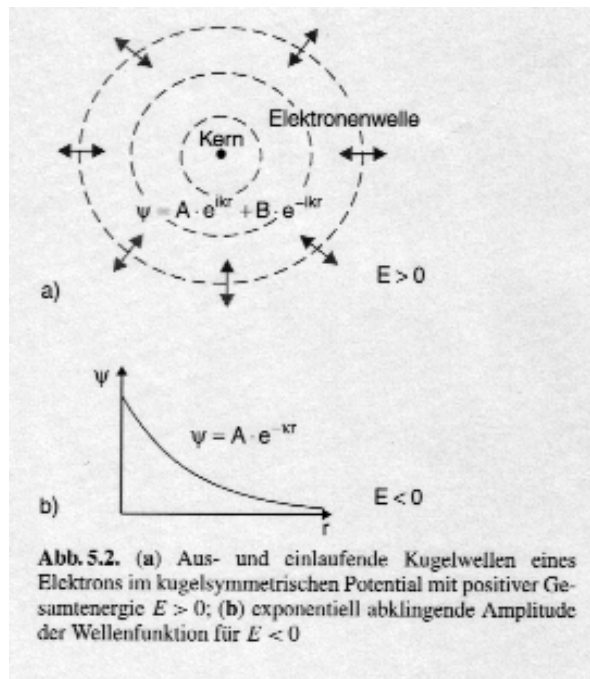


Abb. 5.2. (a) Aus- und einlaufende Kugelwellen eines Elektrons im kugelsymmetrischen Potential mit positiver Gesamtenergie $E > 0$; (b) exponentiell abklingende Amplitude der Wellenfunktion für $E < 0$

mit $k = \sqrt{2\mu E}/\hbar$. Für $E > 0$ wird k reell. Der erste Term stellt mit $(A \propto \frac{1}{r})$ den Ortsanteil einer auslaufenden Kugelwelle dar,

$$\psi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cdot e^{i(kr - \omega t)} \quad (10)$$

die ein bei positiver Energie den Kern verlassendes Elektron beschreibt.

- Entsprechend stellt der zweite Term eine einlaufende Kugelwelle, bei der sich ein Elektron dem Kern nähert, dar. Für $E < 0$ erhält man die asymptotischen Lösungsfunktionen mit $\kappa = \sqrt{-2\mu E\hbar} = i \cdot k$

$$R(r \rightarrow \infty) = A \cdot e^{-\kappa r} + B e^{\kappa r} \quad (11)$$

Da R normierbar und endlich bleiben soll, folgt $B = 0$.

- Für die allgemeine Lösung wird der Ansatz

$$(R(r) = u(r) \cdot e^{-\kappa r} \quad (12)$$

verwendet und mit

$$a = \frac{\mu Z e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2} \quad (13)$$

in die Gleichung

$$\frac{du^2}{dr^2} + 2\left(\frac{1}{r}\kappa\right)\frac{du}{dr} + \left[\frac{2a - 2\kappa}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]u = 0 \quad (14)$$

wird der Potenzreihenansatz

$$u(r) = \sum_j b_j \cdot r^j \quad (15)$$

eingesetzt, der zur Rekursionsformel

$$b_j = 2b_{j-1} \frac{\kappa \cdot j - a}{j(j+1) - l(l+1)} \quad (16)$$

führt. Damit $R(r)$ normierbar bleibt, darf die Potenzreihe nur endlich viele Glieder haben. b_{n-1} sei daher für $j = n - 1$ der letzte von Null verschiedene Koeffizient. So wird die Bedingung

$$j < n \quad (17)$$

erhalten. Daraus folgt für $b_n = 0$:

$$a = n \cdot \kappa \quad (18)$$

und mit $\kappa = \sqrt{-2\mu E \hbar}$ ergibt sich für die möglichen Eigenwerte

$$E = \frac{a^2 \hbar}{2\mu n^2} = \frac{-\mu Z^2}{8\epsilon_0 h^2 n^2} = -Ry^* \cdot \frac{Z}{NB^2} \quad (19)$$

mit der Rydberg-Konstanten

$$Ry^* = \frac{\mu e^4}{8\pi\epsilon_0 h^2} \quad (20)$$

die sich identisch mit den Ergebnissen des Bohrschen Modells erweisen.

- Hier wurde ersichtlich, dass die Energiezustände E_n mit der Forderung, dass das Elektron auf ein endliches Raumgebiet beschränkt ist, zusammenhängen.
- Außer der Grenze $j < n$ für den Summationsindex j gibt es auch eine Begrenzung für die Drehimpulsquantenzahl l , die die Werte $l = 0, 1, 2, \dots$ annehmen kann. Aus der Notwendigkeit, dass $u(r)$ endlich bleiben soll, erhält man die Bedingung

$$n - 1 \geq j \geq l \quad (21)$$

woraus für die Drehimpulsquantenzahl l folgt:

$$l \leq n - 1 \quad (22)$$

Mit der Rekursionsformel lassen sich die Funktionen $u(r)$ und auch die Radialfunktionen $R(r)$ berechnen und man erhält die in den Tabellen für niedrige n und l zusammengestellten Funktionen $R_{n,l}(r)$

4.1.3 Quantenzahlen und Wellenfunktionen des H-Atoms

Demtröder Exp. Phys. 3, Kap. 5.1.3 Die normierten Wellenfunktionen $\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{n,l}(r) \cdot Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ sind in der entsprechenden Tabelle abhängig für die Quantenzahlen n , l und m dargestellt. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit am Ort (r, ϑ, φ) ist von den Quantenzahlen abhängig. Die Atomzustände sind also eindeutig durch die Quantenzahlen (n, l, m) charakterisierbar, einige Radialfunktionen sind in der entsprechenden Abbildung illustriert.

Zusammen mit den Winkelfunktionen $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$ erhält man die räumlichen Aufenthaltswahrscheinlichkeiten $(\psi(r, \vartheta, \varphi))^2$ des Elektrons im Coulombpotential, die ebenfalls für einige Beispiele dargestellt sind.

Die durch die Quantenzahlen beschriebenen Zustände werden durch eine Buchstaben-Nomenklatur bezeichnet. Der Zustand mit $n = 2$, $l = 1$, $m = 0$ wird mit $2p\sigma$ bezeichnet, derjenige mit $n = 4$, $l = 3$, $m = 2$ als $4f\delta$ -Zustand.

Tabelle 5.1. Die normierten radialen Eigenfunktionen $R(r)$ (Laguerre-Polynome) für ein Elektron im Coulomb-Potential ($N = (Z/na_0)^{3/2}$, $x = Zr/na_0$, $a_0 = 4\pi\epsilon_0\hbar^2/\mu e^2$)

n	l	$R_{n,l}(r)$
1	0	$2Ne^{-x}$
2	0	$2Ne^{-x}(1-x)$
2	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}Ne^{-x}x$
3	0	$2Ne^{-x}\left(1-2x+\frac{2x^2}{3}\right)$
3	1	$\frac{2}{3}\sqrt{2}Ne^{-x}x(2-x)$
3	2	$\frac{4}{3\sqrt{10}}Ne^{-x}x^2$
4	0	$2Ne^{-x}\left(1-3x+2x^2-\frac{x^3}{3}\right)$
4	1	$2\sqrt{\frac{2}{3}}Ne^{-x}x\left(1-x+\frac{x^2}{3}\right)$
4	2	$2\sqrt{\frac{1}{3}}Ne^{-x}x^2\left(1-\frac{x}{3}\right)$
4	3	$\frac{2}{3\sqrt{35}}Ne^{-x}x^3$

Tabelle 5.2. Die normierten vollständigen Eigenfunktionen eines Elektrons im Coulombpotential $V(r) = -Z \cdot e^2/(4\pi\epsilon_0 r)$

n	l	m	Eigenfunktionen $\psi_{n,l,m}(r, \vartheta, \varphi)$
1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}e^{-Zr/a_0}$
2	0	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(2-\frac{Zr}{a_0}\right)e^{-Zr/2a_0}$
2	1	0	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\cos\vartheta$
2	1	± 1	$\frac{1}{8\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/2a_0}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	0	0	$\frac{1}{81\sqrt{3\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(27-18\frac{Zr}{a_0}+2\frac{Z^2r^2}{a_0^2}\right)e^{-Zr/3a_0}$
3	1	0	$\frac{\sqrt{2}}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(6-\frac{Zr}{a_0}\right)\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/3a_0}\cos\vartheta$
3	1	± 1	$\frac{1}{\sqrt{81\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\left(6-\frac{Zr}{a_0}\right)\frac{Zr}{a_0}e^{-Zr/3a_0}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	2	0	$\frac{1}{81\sqrt{6\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Z^2r^2}{a_0^2}e^{-Zr/3a_0}(3\cos^2\vartheta-1)$
3	2	± 1	$\frac{1}{81\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Z^2r^2}{a_0^2}e^{-Zr/3a_0}\sin\vartheta\cos\vartheta e^{\pm i\varphi}$
3	2	± 2	$\frac{1}{162\sqrt{2\pi}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2}\frac{Z^2r^2}{a_0^2}e^{-Zr/3a_0}\sin^2\vartheta e^{\pm 2i\varphi}$

- Die Energie E_n hängt nur von der Hauptquantenzahl n ab, weshalb zu jedem Zustand l insgesamt $(2l + 1)$ energetisch gleiche (entartete) Zustände gehören. Außerdem gilt $l < n$ weshalb der Entartungsgrad

$$k = \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2 \quad (23)$$

beträgt. Der Grundzustand mit $n = 1$ ist nicht entartet. Aus den bisherigen Berechnungen kann ein Termschema wie in der Abbildung dargestellt erhalten werden.

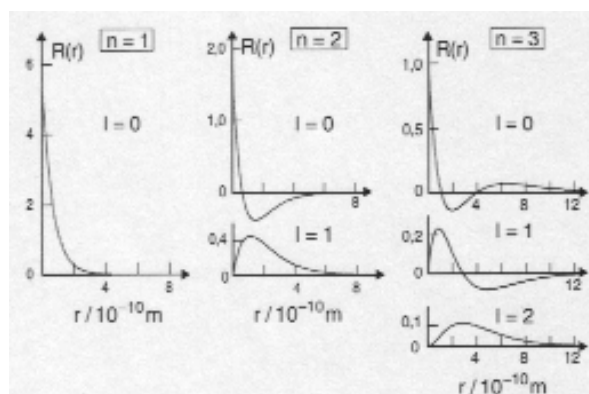


Abb. 5.3. Die Radialfunktionen $R_{n,l}(r)$ des Wasserstoffatoms für die Hauptquantenzahlen $n = 1, 2, 3$. Die Ordinate ist in Einheiten von $10^8 \text{ m}^{-3/2}$ aufgetragen

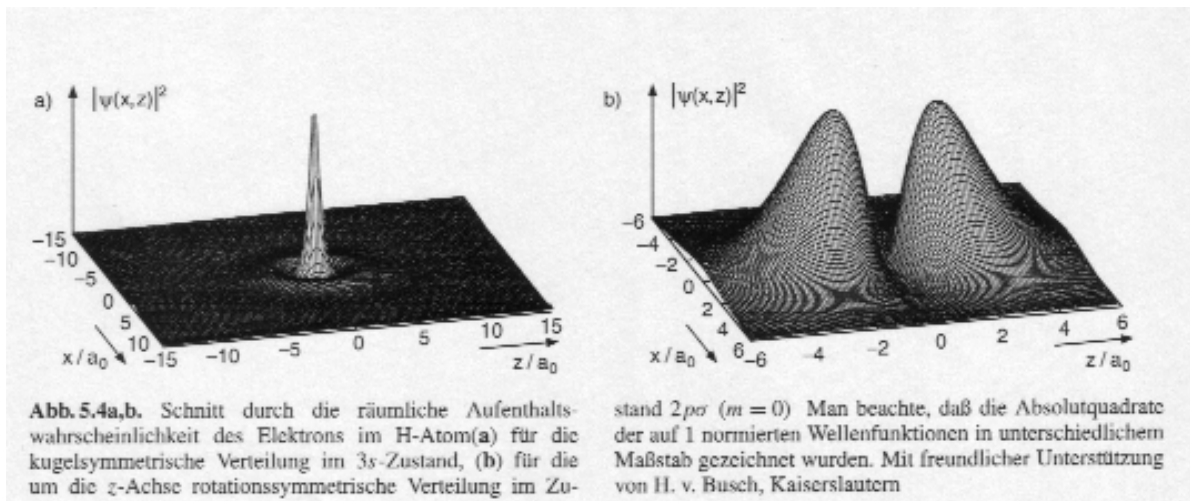


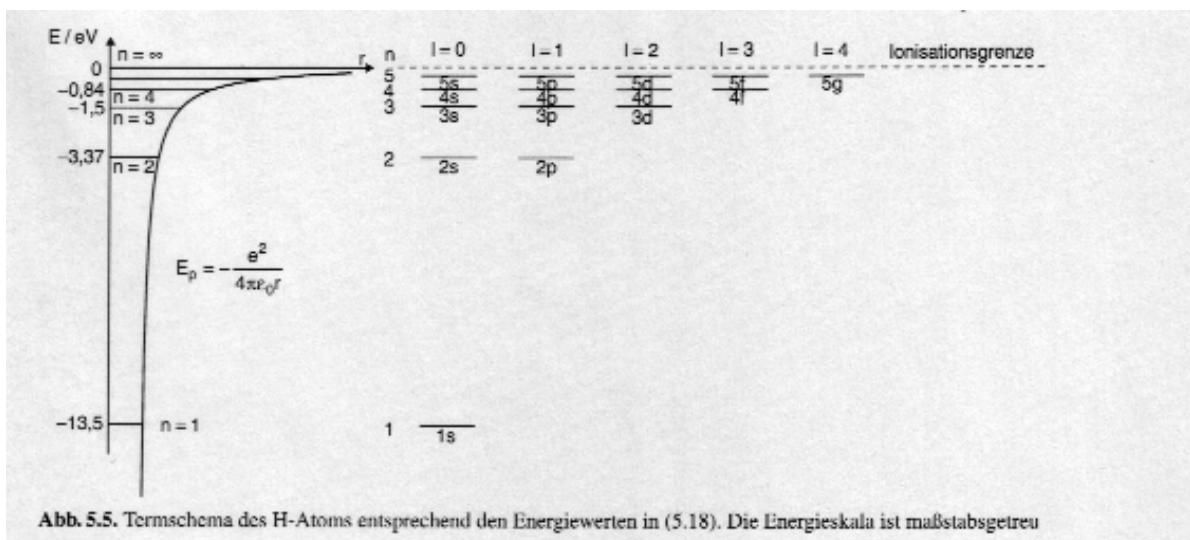
Tabelle 5.3. Buchstabenbezeichnung der Zustände (l, m)

l	Zustand	$ m $	Zustand
0	s	0	σ
1	p	1	π
2	d	2	δ
3	f	3	φ
4	g	4	γ

4.1.4 Aufenthaltswahrscheinlichkeit und Erwartungswerte des Elektrons in verschiedenen Quantenzuständen

Demtröder *Exp. Phys.* 3, Kap. 5.1.4

- Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das Elektron des H-Atoms im Grundzustand $1s\sigma$ mit dem Drehimpuls $|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ ist im Gegensatz zum Bohrschen Atommodell, wo $|\vec{l}| = \hbar$ mit $r = a_0$ gelten, kugelsymmetrisch. Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(r, \vartheta, \varphi)|$ hat am Kernort ein Maximum.
- Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron zwischen r und $r + dr$ (unabhängig von ϑ und φ)



vom Kern entfernt anzutreffen, erhält man mit

$$W(r)dr = \int_{\vartheta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2 r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \quad (24)$$

und mit ψ für $n = 1, l = 0, m = 0$:

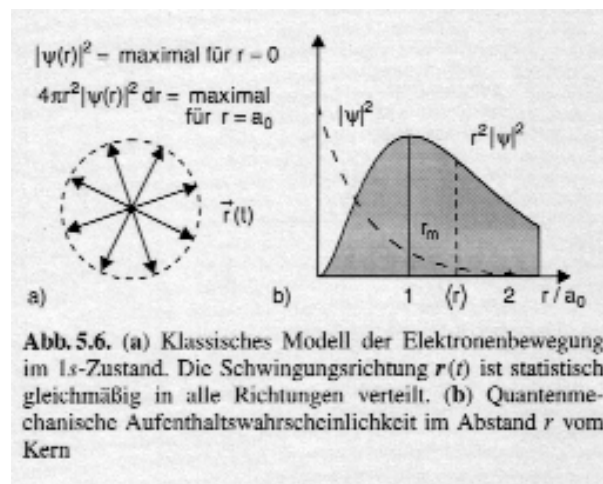
$$W(r)dr = \frac{4Z^3}{a_0^3} r^2 e^{-2Zr/a_0} dr \quad (25)$$

Die Wahrscheinlichkeit, ein Elektron zwischen r und $r + dr$ zu finden, beträgt daher:

$$W(r)dr = 4\pi r^2 |\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2 dr \quad (26)$$

Mit dem Maximum $r_m = a_0/Z$, das bei $Z = 1$ dem Bohrschen Radius entspricht. Bei einem Elektron in einem $1s$ -Zustand müsste man in klassischer Betrachtungsweise wegen $l = 0$ statt der Kreisbahn im Bohrschen Modell eine Schwingung durch den Kern annehmen, wobei im zeitlichen Mittel eine kugelsymmetrische Aufenthaltswahrscheinlichkeit erreicht wird.

- Den Erwartungswert $\langle r \rangle$ für den mittleren Abstand des Elektrons vom Kern im Grundzustand erhält man mit der $1s$ -Wellenfunktion



$$\langle r \rangle = \int_{r=0}^{\infty} \frac{r}{\pi a_0^3} \cdot 4\pi r^2 \cdot e^{-2r/a_0} dr = \frac{3}{2} a_0 \quad (27)$$

der nicht genau mit dem Bohrschen Radius übereinstimmt.

- In der Abbildung 5.7 sind die Funktionen $r^2 a_0 |R_{n,l}(r)|^2$ für einige Zustände (n, l) gegen r/a_0 aufgetragen, wobei eine Flächennormierung zu 1 vorgenommen wurde und die Kurven proportional zur Aufenthaltswahrscheinlichkeit $4\pi r^2 |R_{n,l}(r)|^2$ des Elektrons in der Kugelschale r bis $r + dr$ sind.

- Die Wahrscheinlichkeit $W(r < a_0)$, dass sich das Elektron innerhalb des Bohrschen Radius aufhält, ist für s-Funktionen $l = 0$

$$W_{n,l}(r < a_0) = \int_{r=0}^{a_0} |R_{n,l}(r)|^2 dr \quad (28)$$

ergibt für $n = 1, l = 0$

$$W_{1,0}(r < a_0) = \frac{4}{a_0^3} \int_{r=0}^{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} dr = 0,32 \quad (29)$$

für $n = 2, l = 0$

$$W_{2,0}(r < a_0) = \frac{1}{8a_0^3} \int_{r=0}^{a_0} \left(4r^2 + \frac{4r^3}{a_0} + \frac{r^4}{a_0^2} e^{-r/a_0}\right) dr = 0,034 \quad (30)$$

für $n = 2, l = 1$

$$W_{2,1}(r < a_0) = \frac{1}{24a_0^5} \int_{r=0}^{a_0} r^4 e^{-r/a_0} dr = 0,0037 \quad (31)$$

- Klassisch gesehen entsprechen $l = 0$ -Bahnen langgezogenen Ellipsen, $l = n - 1$ -Bahnen nähern sich mit größer werdendem n immer mehr Kreisbahnen an. Die Summe aller Aufenthaltswahrscheinlichkeiten bei gegebener Hauptquantenzahl n ist immer kugelsymmetrisch., weshalb man die Summe aller Zustände für einen festen Wert n auch Elektronenschale nennt.

4.2 Normaler Zeemaneffekt

Demtröder Kap. 5.2

Zur Beschreibung des H-Atoms im äußeren Magnetfeld verwenden wir ein halbklassisches Modell:

- Die Elektronen bewegen sich auf klassischen Kreisbahnen.
- Es gilt die Quantenbedingung $|l| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ für deren Drehimpuls.

Es entsteht der elektrische Strom:

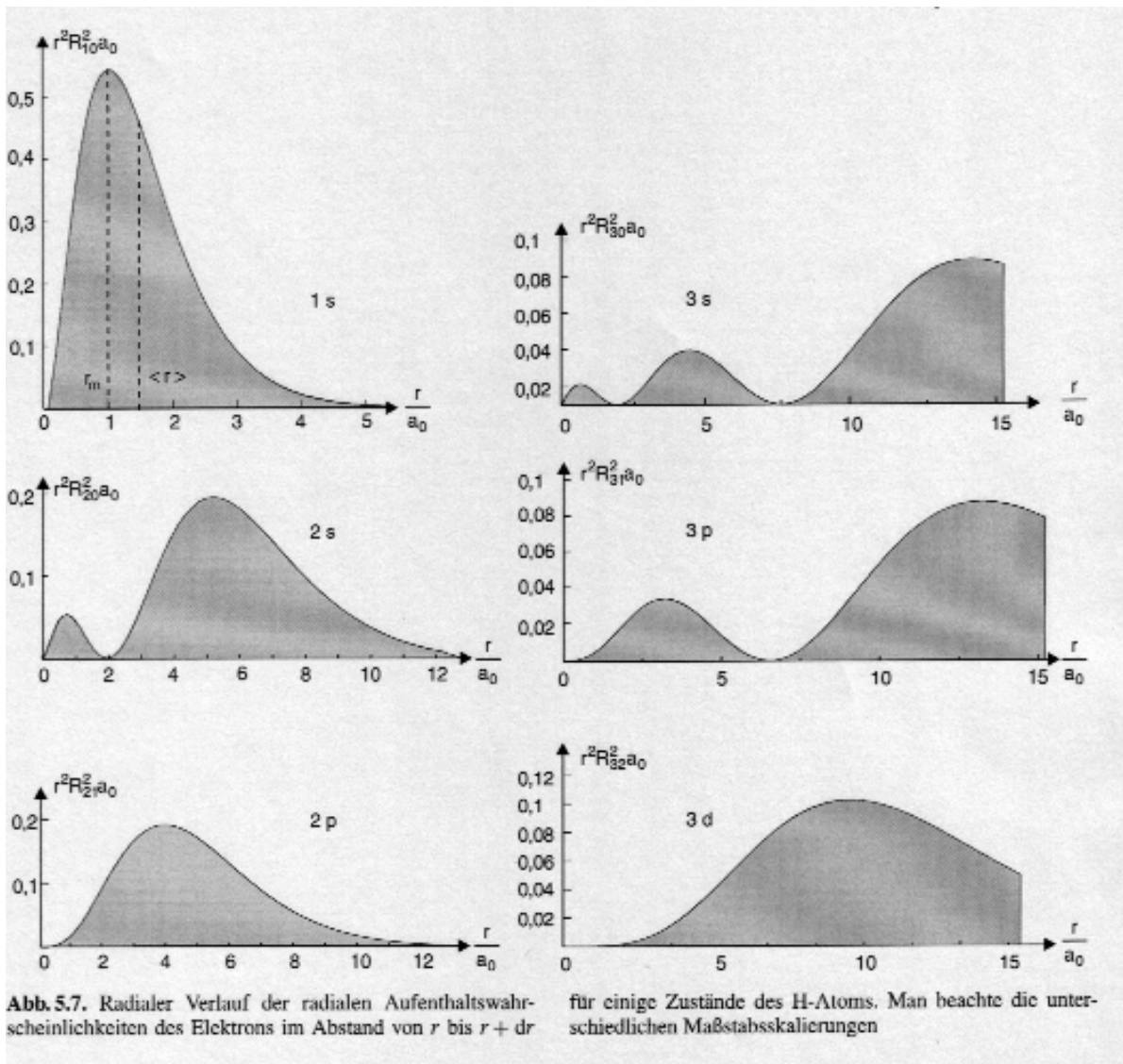
$$I = -e \cdot v = -e \cdot v / (2\pi r), \quad (32)$$

wobei v die Frequenz des e^- auf der Kreisbahn mit dem Radius r ist. Mit dem Flächenvektor $\vec{A} = \pi r^2 \vec{\hat{n}}$ ergibt sich für das magnetische Moment (vgl. Demtr. Bd. 2, Kap. 3.5):

$$\vec{p}_m = I \cdot \vec{A} = I \cdot \pi r^2 \vec{\hat{n}} = -ev(r/2) \cdot \vec{\hat{n}} \quad (33)$$

Der Bahndrehimpuls des umlaufenden Elektrons ist

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e \cdot r \cdot v \cdot \vec{\hat{n}} \quad (34)$$



Mit (33) erhält man das magnetische Moment in Abhängigkeit vom Bahndrehimpuls:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \cdot \vec{l} \equiv \vec{\mu}_l \quad (35)$$

Die potentielle Energie eines dieses magnetischen Dipols im Magnetfeld \vec{B} ist gegeben durch:

$$E_{\text{Pot}} = \vec{p}_m \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m_e} \cdot \vec{l} \cdot B \quad (36)$$

Sei das magn. Feld $\vec{B} = (0, 0, B_z = B)$ in z -Richtung ausgerichtet so ergibt sich wegen $l_z = m \cdot \hbar$:

$$E_{\text{Pot}} = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} mB, \quad (37)$$

wobei m die magnetische Quantenzahl ist, welche die ganzzahligen Werte $-l \leq m \leq +l$ annehmen kann.

Der konstante Vorfaktor

$$\mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e} \approx 9,274 \cdot 10^{-24} \text{J/T} \quad (38)$$

wird **Bohrsches Magneton** genannt.

Es ergibt sich also eine durch das äußere Magnetfeld bewirkte Zusatzenergie eines Zustandes (n, l, m)

$$\Delta E_m = \mu_B \cdot m \cdot B \quad (39)$$

und wir erhalten für die Termwerte des H-atoms im B-Feld:

$$E_{n,l,m} = E_{\text{Coul}}(n, l) + \mu_B \cdot m \cdot B \quad (40)$$

Die $(2l + 1)$ entarteten m -Zustände ohne B-Feld spalten sich also in $(2l + 1)$ equidistante sog. Zeeman-Komponenten auf. Deren Abstand ist gegeben durch

$$\Delta E = E_{n,l,m} - E_{n,l,m-1} = \mu_B \cdot B \quad (41)$$

Dieser Effekt wird **normaler Zeeman-Effekt** genannt.

Aus (35) und (38) ergibt sich

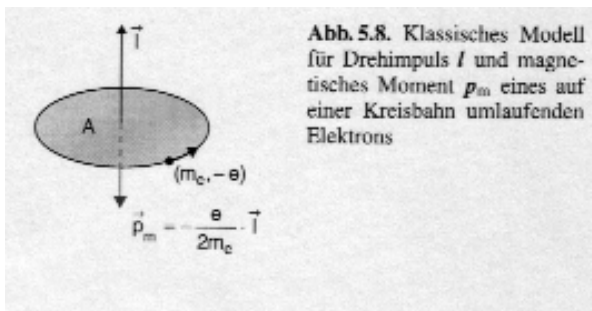


Abb. 5.8. Klassisches Modell für Drehimpuls l und magnetisches Moment p_m eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Elektrons

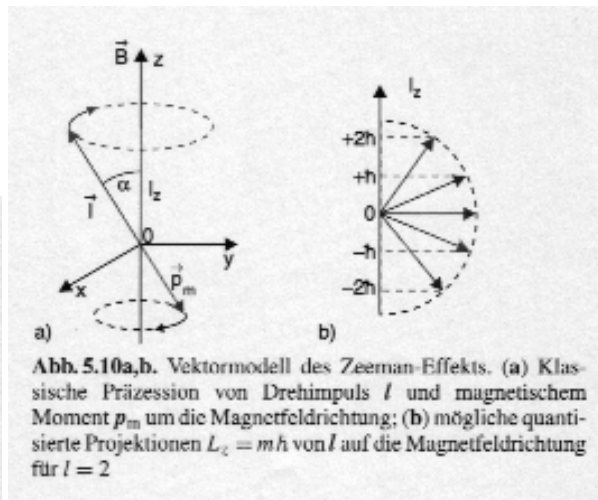


Abb. 5.10a,b. Vektormodell des Zeeman-Effekts. (a) Klassische Präzession von Drehimpuls l und magnetischem Moment p_m um die Magnetfeldrichtung; (b) mögliche quantisierte Projektionen $L_z = m\hbar$ von l auf die Magnetfeldrichtung für $l = 2$

$$\vec{\mu}_l = (\mu_B/\hbar) \cdot \vec{l} \quad (42)$$

Die Kugelsymmetrie des Coulombfeldes wird durch das Magnetfeld erniedrigt und es wirkt das Drehmoment \vec{D} mit

$$\vec{D} = \vec{\mu}_l \times \vec{B}$$

auf das Elektron, so dass der Drehimpuls nicht mehr zeitlich konstant bleibt. Sei $\vec{B} = (0, 0, B_z = B)$, dann ist die Komponente l_z zeitlich konstant und der Vektor \vec{l} präzediert um die z-Achse auf einem Kegel mit dem Öffnungswinkel 2α , wobei

$$\cos \alpha = \frac{l_z}{|\vec{l}|}$$

ist. Die Komponente l_z nimmt die Werte

$$l_z = m \cdot \hbar \quad \text{mit} \quad -l \leq m \leq +l \quad (43)$$

an und der Betrag von \vec{l} ist

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (44)$$

Die Komponenten l_x und l_y sind nicht definiert, ihre Erwartungswerte sind (wie der klassische zeitliche Mittelwert) gleich null.
 Das Modell sagt folgendes für die Emission oder Absorption von Licht durch Atome im Magnetfeld:

- Fällt eine σ^+ -zirkularpolarisierte Lichtwelle (alle Photonen haben den Spin $+\hbar$) in z-Richtung auf ein Atom im Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B_z = B)$, so bewirken sie bei der Absorption eine Änderung $\Delta l_z = +\hbar$ der atomaren Drehimpulskomponente. Es treten demnach die Übergänge mit $\Delta m = m_2 - m_1 = +1$ auf
- Bei σ^- -Polarisation werden Übergänge mit $\Delta m = -1$ induziert
- Entsprechendes gilt für die Emission, es werden in z-Richtung sowohl σ^+ also auch σ^- -zirkularpolarisierte emittiert.
- Senkrecht zum Magnetfeld treten drei linear polarisierte Komponenten auf: eine unverschobene mit dem Vektor \vec{E} parallel zu \vec{B} und zwei verschobene mit $\vec{E} \perp \vec{B}$.
- Die Zeemann-Aufspaltung $\Delta E = \mu_B \cdot B$ ist unabhängig von den Quantenzahlen n und l . Jede Spektrallinie sollte also bei dem Übergang $(n_1, l_1) \rightarrow (n_2, l_2)$ immer in drei Zeeman-Komponenten (σ^+ , σ^- , und π -Polarisation) mit dem Frequenzabstand $\Delta \nu = \mu_B \cdot B/h$ aufspalten.

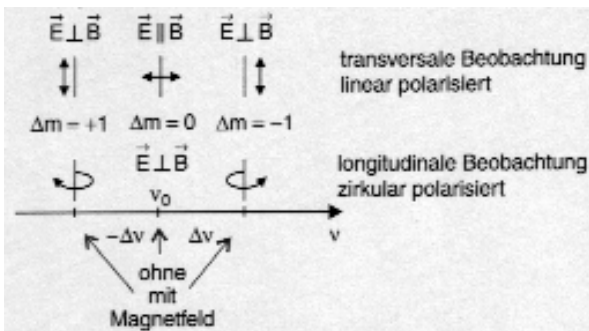


Abb. 5.11. Normaler Zeeman-Effekt. Aufspaltungsbild und Polarisation einer Spektrallinie mit der Mittenfrequenz ν_0 bei transversaler und longitudinaler Beobachtung. Die Aufspaltung ist $\Delta \nu = \mu_B \cdot B/h$

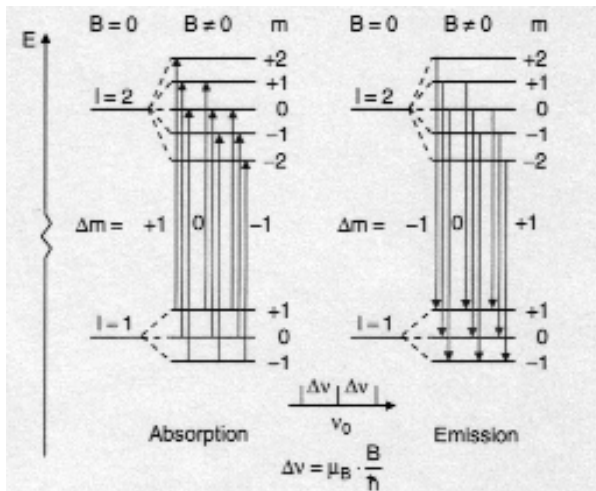


Abb. 5.12. Termschema für Zeeman-Übergänge mit $\Delta m = \pm 1, 0$ in Absorption und Emission