## Imagination – Wovon und wie sich Mathematik ein Bild macht

Anschauung ist ein wichtiges Element im wissenschaftlichen Arbeiten. Dies gilt ganz besonders auch für die Mathematik. Zwar ist die moderne Mathematik des 20. Jahrhundert auf ein allein der Logik verpflichtetes Fundament gestellt worden, vor allem dank des von David Hilbert eingeführten axiomatischen Aufbaus. Dennoch spielt das Denken in Bildern und die Anschauung des logisch Denkbaren aber nicht real Erfahrbaren und Erfassbaren eine wesentliche Rolle in der Mathematik. Schon die Imagination eines im mathematischen Sinne allgemeinen dreidimensionalen Raumes, einer sogenannten Mannigfaltigkeit, ist eine fantastische Herausforderung. Ein wesentlicher Grund hierfür liegt in unserer begrenzten eigenen Erfahrung des dreidimensionalen Raumes, welchen wir für unsere Wirklichkeit halten.

Welche Vorstellung haben und machen wir uns von dem Raum, in dem wir leben? Dies ist das Problem des Geometers und Astronomen. Heute würde man von dem Kosmologen sprechen. Newton baute seine Prinzipien der Physik auf der Geometrie Euklids auf, Kant setzte diese Vorstellung von Raum und Zeit als ein Absolutum fest voraus. Erst Einstein brach mit dieser euklidischen Vorstellung des physikalischen Raums und bediente sich eines wesentlich allgemeineren Konzepts der Riemannschen Geometrie aus der Mathematik des späten 19. Jahrhunderts. Vorläufer dieser im allgemeinen beliebig-dimensionalen und beliebig gekrümmten, mal beschränkten oder mal unbeschränkten Räume waren die nicht-euklidischen Räume von Bolyai, Lobachewski und Gauß. Lobachevski betitelte seine Arbeit von 1829 mit der Bezeichnung der „Imaginären Geometrie“. Imaginär bezog sich hier jedoch weniger auf eine Nicht-Realität, sondern auf die entscheidende Rolle der imaginären Zahl i in den Formelbeschreibungen seiner Geometrie.

Ein wesentlicher Punkt in unseren Schwierigkeiten uns einen allgemeinen, womöglich beschränkten aber grenzenlosen dreidimensionalen Raum bildlich vorzustellen liegt in der fehlenden Außensicht. Ein wunderbares Beispiel für einen solchen dreidimensionalen Raum findet sich bereits in Dante Alighieris „Göttlichen Komödie“. In der dortigen Vorstellung ist die Welt aus Sphären wie Schalen zusammengesetzt, analog den Meridianen auf der zweidimensionalen Kugeloberfläche, welche ausgehend vom punktförmigen Nordpol erst die nördliche Hemisphäre überstreichen, ihre größte Ausdehnung mit dem Äquator haben und die südliche Hemisphäre überstreichend im wieder punktförmigen Südpol enden. Bei Dante besteht das Universum auch aus zwei Hälften, zunächst die eine dreidimensionale Hemisphäre mit der Erde im Mittelpunkt, welche durch immer größere zweidimensionale Schalen umfasst wird, auf denen sich Mond, Sonne, Planeten und Fixsterne befinden, und welche begrenzt wird durch die äußerste Sphäre, quasi dem Äquator, dem Primum Mobile. Jenseits dieser Begrenzung beginnt die zweite Hälfte, das Empyreum, ebenso aufgebaut aus konzentrischen Sphären, auf denen die verschiedenen Klassen von Engeln angeordnet sind, und final mit einem blendenden Licht im Zentrum. Mathematisch gesehen handelt es sich bei diesem Universum um eine präzise Beschreibung der dreidimensionalen Sphäre, eine grenzenlose, aber endlich ausgedehnte drei-dimensionale Mannigfaltigkeit, deren geometrische Beschreibung nur mit Hilfe einer gekrümmten Geometrie möglich ist. Hier reibt sich die Vorstellungskraft an der intrinsischen Sicht des Raumes, lässt sich doch eine zweidimensionale Fläche noch dadurch anschaulich erfassen, dass der geistige Beobachter sie sich eingebettet in einen umgebenden drei-dimensionalen Raum vorstellt. Eine analoge extrinsische Vorstellung einer drei-dimensionalen Mannigfaltigkeit eingebettet in einen vierdimensionalen Raum ist kognitiv nicht mehr leistbar. Wir können uns nur noch Projektionen als Hilfskonstrukte versuchen vorzustellen.

Bilder im mathematischen Denken sind eigentlich immer Projektionen, im Sinne von Platons Höhlengleichnis nur Schatten eines idealen Objekts. Wenn wir uns ein Bild von etwas machen, können wir nie alle Facetten gleichzeitig erfassen, genauso wenig wie der Intelligenzquotient als eine simple Zahl auch nur annähernd die Gesamtheit aller kognitiven Fähigkeiten erfassen könnte.

Bilder spielen in der mathematischen Theorie und im Verstehensprozess der Mathematik eine eminent wichtige Rolle. Selbst in der Kommunikation von Mathematik tauchen sie zentral auf. Es gibt auch bedeutende Mathematiker, welche selbst blind sind, und bei denen die Bildhaftigkeit der Materie erst recht von besonderer Bedeutung ist

Imagination bedeutet aber nicht nur Vorstellungskraft. Sich ein Bild zu machen ist auch ein kreativer, schöpferischer Akt. Mathematische Forschung ohne Kreativität ist nicht möglich. Fantasie ist wesentlich, wie auch schon Hilbert einmal treffend bemerkte. Trotz des rein logischen strukturellen Aufbaus der modernen Mathematik, wäre wirkliche mathematische Erkenntnis nicht durch einen zur Logik fähigen Automaten leistbar. Ein fantastisches Beispiel ist der in jungen Jahren verstorbene indische Mathematiker Ramanujan, welcher nie wirklich zu einem Mathematiker ausgebildet wurde, keine mathematische Herleitung seiner berühmten Formeln zu leisten vermochte, diese dagegen seiner Auskunft nach in seinen Träumen fand oder besser erfand. Anerkannte Beweise mancher dieser Formeln gelangen oft erst später ausgebildeten Mathematikern. Ein anderes Beispiel eines Traumbildes ist die Legende der Entdeckung der chemischen Struktur-Formel des Benzolringes durch den Chemiker Kekulé.

Tatsächlich hat es auch Mathematiker gegeben, welche der Kreativität in ihrer Arbeit, der Anregung neuer Denkbilder durch bewusstseinserweiternde Drogen nachzuhelfen versucht haben. Das Neuroenhancement in Bezug auf Forschungsleistungsfähigkeit ist heute wieder ein diskutiertes Thema unter Wissenschaftlern.

Hier komme ich zu dem dritten Bedeutungskomplex der Imagination, nämlich der Einbildung, den Täuschungen und Trugbildern, den falschen Vorstellungen. In der Mathematik sind es die falschen Fährten, die Sackgassen, die Lücken im Beweis, oder schlicht die lange unerkannten Fehler in der Argumentationskette, die einfach dadurch nicht gleich auffallen, da die Kleinteiligkeit der Logik nicht hinreichend geleistet worden ist oder kaum leistbar ist. Bilder müssen oft revidiert werden. In der praktischen Arbeit eines Mathematikers kann es leicht auch eine Fata Morgana geben, falsche Bilder, die sich bei sorgfältiger Überprüfung in Luft auflösen. Hier ist eine hohe Frustrationstoleranz von Nöten. Ein Scheitern in der Mathematik ist immer nur ein Scheitern an den eigenen Grenzen. Das Labor ist der Kopf. Geht etwas schief, liegt es allein im eigenen Denken. Fast jeder Mathematiker wünscht sich an irgendeinem Punkt in seinem Kampf mit dem gestellten Problem die Kristallkugel, in die er gerne schauen möchte.

Lassen Sie mich mit dem Schluss des 33. Gesanges aus dem Paradies der Göttlichen Komödie enden:

*So wie der Geometer, der sich mühet,*
*Den Kreis zu messen, und mit allem Denken*
*Doch jene Regel, die er braucht, nicht findet,*
*So ging es mir bei diesem neuen Bilde:*
*Ich wollte sehn, wie sich das Bild zum Kreise*
*Verhält und wie es darin Raum gefunden.*
*Doch reichten dazu nicht die eignen Flügel.*
*Vielmehr ist da mein Geist getroffen worden*
*Von einem Blitz, der seinen Wunsch erfüllte.*
*Die hohe Bildkraft musste hier versagen,*
*Doch schon bewegte meinen Wunsch und Willen,*
*So wie ein Rad in gleichender Bewegung*
*Die Liebe, die beweget Sonn´ und Sterne.*

*Dante Alighieri, Die Göttliche Komodie, Das Paradies, 33. Gesang*
*(Bilde= Vista, Bild=Imago, Bildkraft= Fantasia)*

*Nachtrag: Ein Teil der Ideen und Inhalte dieses Textes - vor allem den Bezug auf Dantes Commedia – verdanke ich dem lesenswerten Buch von Robert Osserman, Poetry of the Universe, erschienen 1995 bei Anchor Books.*