

## Ex-Physik I/II, Uni Leipzig, WS 1999/2000 und SS 2000

→ *Differential* einer Funktion  $f(x)$  wird aus Differenzenquotient berechnet:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Geometrische Interpretation: Differential ist *Steigung* der Funktion  $f(x)$  bei  $x = x_0$ .

→ Wichtige Rechenregeln mit Differentialen:

$$\left[ f(x) + g(x) \right]' = f'(x) + g'(x) \quad (\text{Summenregel})$$

$$\left[ f(x) \cdot g(x) \right]' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x) \quad (\text{Produktregel})$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g(x)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

$$\left[ f(g(x)) \right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (\text{Kettenregel})$$

→ Umkehrung der Differentiation ist das *Integral*:

$$\int f(x) dx = F(x) + \text{const.} \quad (\text{Unbestimmtes Integral})$$

$F(x)$  wird *Stammfunktion* genannt. Wegen  $\frac{d}{dx}(\text{const.}) = 0$  ist Stammfunktion nur bis auf Integrationskonstante bestimmt. Werden Integrationsgrenzen spezifiziert, so entsteht *Bestimmtes Integral*:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Geometrische Interpretation: Fläche unter  $f(x)$  für  $a < x < b$ .

→ Mittels *Reihenentwicklung von Funktionen* werden Funktionswerte abgeschätzt (Wert von  $f(a)$ , wenn  $f(x_0)$  bekannt und  $|a - x_0|$  klein?) oder Rechnungen vereinfacht. *Taylor-Entwicklung*:

$$f(a) = f(x_0) + \frac{a - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(a - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(a - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + O(n+1)$$

*Konvergenzbereich*: Entwicklung nur für  $|a - x_0| < \xi$  gültig!

→ Meßwerte aus Messungen, die *nur* statistische (keine systematischen!) Fehler beinhalten, streuen um wahren Wert  $\mu$  der Meßgröße oft in der Form einer Gauß-Verteilung:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (h: \text{Wahrscheinlichkeit, beliebigen Meßwert bei } x \text{ zu finden; } \sigma: \text{Maß für Breite der Gaußfunktion})$$

Für geringe Anzahl  $N$  von Messungen wird Gaußfunktion schlecht, mit zunehmendem  $N$  immer besser nachvollzogen. Abschätzung der (unbekannten) Werte von  $\mu$  und  $\sigma$  durch Mittelwert  $\bar{x}$  und Standardabweichung  $s$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_N x_i \quad s = \frac{1}{\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_N (x_i - \bar{x})^2}$$

Schwankungsbereich des Meßergebnisses:

$$\Delta\bar{x} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

Gauß'sche *Fehlerfortpflanzung*: Ist Größe  $f$  aus verschiedenen Meßgrößen zusammengesetzt,  $f = f(x, y, z)$ , so gilt für dessen Meßfehler:

$$s_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 s_z^2}$$

→ *Vektoren* besitzen sowohl Betrag als auch Richtung.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = x_1 \vec{e}_x + y_1 \vec{e}_y + z_1 \vec{e}_z \quad (\text{kartesische Koordinaten})$$

Rechenregeln:

$$\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_x \\ c \cdot a_y \\ c \cdot a_z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \pm b_x \\ a_y \pm b_y \\ a_z \pm b_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \sum_i a_i \cdot b_i, \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

Kreuzprodukt:  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}, \vec{b}$

→ Bestimmte Probleme können besser in angepaßten Koordinatensystemen behandelt werden: Polar-, Zylinder-, Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= r_0 \cos \varphi \\ y_1 &= r_0 \sin \varphi \end{aligned} \quad \text{Polar-Koordinaten in 2d}$$

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \\ \vartheta &= \arccos\left(\frac{z_1}{r_0}\right) \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 &= r_0 \sin \vartheta \cos \varphi \\ y_1 &= r_0 \sin \vartheta \sin \varphi \\ z_1 &= r_0 \cos \vartheta \end{aligned} \quad \text{Kugel-Koordinaten in 3d}$$

(Zylinder-Koordinaten in 3d ähnlich Polar-Koordinaten in 2d)

**Mechanik**: Kinematik des Massenpunktes

→ Geschwindigkeit:  $\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} \quad [v] = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

→ Beschleunigung:  $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{dv_x}{dt} \\ \frac{dv_y}{dt} \\ \frac{dv_z}{dt} \end{pmatrix} \quad [a] = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

→ Vektorielle Größen (wie Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kräfte) überlagern sich *ungestört*. Zur Analyse dürfen Vektorpfeile parallel verschoben werden. (Beispiel: Bootsfahrt über Fluß)

→ Sind  $\vec{r}(t_0)$  und  $\vec{v} = \vec{v}(t)$  bekannt, so kann  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  berechnet werden:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt', \quad \text{analog: } \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt'$$

Sind  $\vec{r}(t_0), \vec{v}(t_0)$  und  $\vec{a} = \vec{a}(t)$  bekannt, so ist  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ :

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[ \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt'' \right] dt' \\ &= \vec{r}(t_0) + v(t_0) \cdot (t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{t'} \vec{a}(t'') dt'' dt' \end{aligned}$$

→ Anwendung: Schiefer Wurf

$$z(t) = v_{z,0} t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (g: \text{Fallbeschleunigung})$$

$$x(t) = v_{x,0} t$$

→ 
$$z(x) = \frac{v_{z,0}}{v_{x,0}} x - \frac{g}{2} \left( \frac{x}{v_{x,0}} \right)^2 = c_1 x + c_2 x^2 \quad (\text{"Wurfparabel"})$$

$$= x \tan \varphi - \frac{g}{2 v_0 \cos^2 \varphi} x^2 \quad (\text{Polarkoordinaten in } \vec{v})$$

→  $x_2 = \frac{v_0}{g} \sin(2\varphi)$  (Wurfweite;  $v_0, \varphi$ : Abwurf-Geschw., -Winkel)

→ Beschleunigung  $\vec{a}$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}$  sind i.A. nicht parallel:  
 $a_{\parallel} \neq 0 \rightarrow |\vec{v}|$  ändert sich,  $a_{\perp} \neq 0 \rightarrow$  Bahnkurve gekrümmt ( $\vec{v}$  ändert Richtg.)

Winkel im Bogenmaß:  $s$  Länge des Bogens,  $r$  Kreisradius  $\rightarrow \varphi = \frac{s}{r}$   
 ist mögliche Darstellung des Winkels  $\varphi$ . [ $\varphi$ ] = 1 rad ("Radiant"):  
 $\pi$  (in rad) =  $180^\circ$ ,  $1 \text{ rad} \sim 57.29\dots^\circ$ ,  $0.017 \text{ rad} = 1^\circ$ .

Kreisbewegung mit konstanter Bahngeschwindigkeit:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{Winkelgeschwindigkeit } [\omega] = 1 \text{ rad/s}$$

$$v_B = \frac{ds}{dt} = r_0 \omega \Leftrightarrow \omega = \frac{v_B}{r_0} \quad \text{Bahngeschwindigkeit}$$

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{Kreisfrequenz } [\nu] = 1/\text{s} = 1 \text{ Hz}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad \text{Umlaufzeit}$$

$$a_{\perp} = v_B \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_B^2}{r_0} \quad \text{Zentripetal-Beschleunigung}$$

Beschleunigte Kreisbewegung:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{Winkelbeschleunigung } [\alpha] = 1 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{\parallel} = \frac{dv_B}{dt} = r_0 \frac{d\omega}{dt} = r_0 \alpha$$

- Winkel als Vektor: Länge  $\leftrightarrow$  Öffnung, Richtung:  $\perp$  zu Ebene, in der Öffnung liegt, Richtungssinn: rechte-Hand-Regel

$$\omega = \frac{v_B}{r_0} \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{e}_r}{r_0} \times \vec{v}_B$$

- **Dynamik**: Was ist Ursache für Beschleunigung eines Körpers?

- Newton'sche Axiome:

(1) Kraft ist Ursache der Beschleunigung:

$$\vec{F}_{ges} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \text{const.}$$

(2) Kraft ist proportional zu Masse  $m$  und Beschleunigung  $a$ :

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad [F] = 1 \text{ m/s}^2$$

mit  $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$  (Impuls) folgt auch allgemeiner:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m\vec{a}$$

(3) Kraft, die von einem Körper auf einen anderen einwirkt, wirkt auf diesen zurück (*actio = reactio*):

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{1,2}$$

wichtige Beispiele für Kräfte:

- Beim Beschleunigen eines Körpers entsteht neue Kraft, die der verursachenden Kraft entgegengerichtet ist: *Trägheitskraft*

$$\vec{F}_{tr} = -m\vec{a} = -m\vec{r}$$

- Reibungskraft bei Bewegung in Richtung  $\vec{e}_v$ :

$$\vec{F}_r = -\mu mg \cdot \vec{e}_v \quad (\mu: \text{Gleitreibungskoeffizient,}$$

$\mu' > \mu$ : Haftreibungskoeffizient)

- Schiefe Ebene (Keilwinkel  $\alpha$ ):

$$\vec{F}_N = mg \cos \alpha \cdot \vec{e}_\perp \quad \text{Normalkraft}$$

$$\vec{F}_H = mg \sin \alpha \cdot \vec{e}_{\parallel} \quad \text{Hangabtrieb}$$

→ elastische Rückstellkraft einer Feder bei Auslenkung  $\vec{S}$  aus Ruhelage:

$$\vec{F}_{el} = -D\vec{S} \quad D: \text{Federkonstante}$$

→ Trägheitskraft bei Kreisbewegung: *Zentrifugalkraft*:  $\vec{F}_{zf} = -\vec{F}_{zp}$  ist der *Zentripetalkraft*  $\vec{F}_{zp}$  entgegengerichtet.

→ Beschleunigung in Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \frac{d^2(r\vec{e}_r)}{dt^2} = r\ddot{\vec{e}}_r + 2r\dot{\omega}\vec{e}_\varphi + r\omega\dot{\vec{e}}_\varphi - r\omega^2\vec{e}_r$$

(Radial-, Coriolis-, Tangential-, Zentripetalbeschleunigung)

→ Die Corioliskraft

$$\vec{F}_{Cor} = 2m\vec{r} \times \vec{\omega}$$

ist Scheinkraft, die im mitrotierenden Koordinatensystem aufgrund Trägheit der Masse  $m$  auftritt. Implikationen:

→ Nachweis der Erdrotation: Foucault-Pendel; Wolkenwirbel um Tiefdruckgebiete

→ Arbeit und Energie

Bei Verschiebung eines Körpers gegen Kraft  $\vec{F}$  wird *Arbeit* verrichtet:

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (=F\Delta r \cos \alpha, \text{ wenn } \vec{F} \text{ unabhängig von } \vec{r})$$

Beispiele:

→ Hubarbeit im Schwerfeld  $\vec{g}$ :  $W_{Hub} = mgh$

→ Arbeit gegen Federkraft:  $W_{Feder} = \frac{D}{2} \Delta x^2$

Arbeit, die an Körper verrichtet wird, erhöht dessen Fähigkeit, selbst wieder Arbeit zu verrichten. Sie erhöht seine *Energie*.

$$E_{pot} = mgh, E_{kin} = \frac{m}{2} v^2, E_{Feder} = \frac{D}{2} \Delta x^2$$

(potentielle, kinetische, in Feder gespeicherte Energie)

$$\Delta E_{kin} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = m \int a_x dx = m \int \frac{dv_x}{dt} \frac{dx}{dt} dt = m \int \frac{dv_x}{dt} v_x dt = m \int_{v_1}^{v_2} v_x dv_x = \frac{m}{2} v_x^2 \Big|_{v_1}^{v_2}$$

→ Gravitationsgesetz: Körper ziehen sich aufgrund ihrer Massen an!

$$\vec{F}_{grav} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r \quad (\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2)$$

ist Zentralkraft (Wirklinie: Verbindungslinie zwischen Körpern).

Potentielle Energie eines Körpers im Schwerfeld des anderen:

$$E_{pot}^{grav} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \Big|_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}$$

Bezugsniveau (Nullpunkt) kann frei gewählt werden, da nur Unterschiede in der Energie maßgeblich sind. Häufig:  $r_1 = \infty$ !

→ Energieerhaltungssatz: Energie kann nicht “erzeugt” oder “vernichtet” werden, sondern eine Energieform entsteht immer aus einer anderen. Z.B. in Mechanik:

$$E_{pot} + E_{kin} + E_{def} = E_{ges}^{mech} = \text{const}$$

Beispiel Feder-Pendel:

$$\frac{m}{2} v^2(t) = \frac{D}{2} (x_0^2 - x^2(t)) \quad (x_0: \text{Ruhelage})$$

gilt für *beliebigen* Zeitpunkt  $t$ .

Eventuell müssen bei Energiebilanz auch andere Beiträge berücksichtigt werden (Wärme, elektrische Energie, etc.)

Anwendung: Entweichgeschwindigkeit aus Erdgravitation

$$E_{pot}(R) + E_{kin}(R) = E_{pot}(\infty) + E_{kin}(\infty)$$

( $R$ : Erdradius,  $E_{kin}(\infty) = 0$ )

→  $v_{entw} = \sqrt{2gR}$       “1. kosmische Geschwindigkeit”

→ Das *Potential*: Skalare, deren Ableitungen nach den Raumrichtungen (physikalisch relevante) Vektorfelder sind, heißen Potentiale.  
Mechanik:

$$E_{pot} = -\int \vec{F} \, d\vec{r} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{F}(\vec{r}) = -\frac{dE_{pot}}{d\vec{r}} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial E_{pot}}{\partial x} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial y} \\ \frac{\partial E_{pot}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Eigenschaften eines Potentials in 2D stehen in enger Analogie zu Eigenschaften einer Geländetopologie, die in Landkarte (Höhenlinien = Äquipotentialflächen; Falllinie = Krafrichtung) dargestellt wird.

- Kräfte, die sich aus Potential ableiten, heißen *konservativ* (Energie wird konserviert!): Entlang geschlossener Trajektorie wird keine Arbeit verrichtet.
- Gleichgewicht: Je kann nach lokaler *Krümmung* des Potentials stabil – labil – indifferent oder metastabil sein:  $\frac{dE_{pot}}{d\vec{r}} = 0$  und

$$\frac{d^2 E_{pot}}{d\vec{r}^2} > 0 \quad - \quad \frac{d^2 E_{pot}}{d\vec{r}^2} < 0 \quad - \quad \frac{d^2 E_{pot}}{d\vec{r}^2} = 0$$

→ Verrichtete Arbeit pro Zeiteinheit ist *Leistung*:

$$P = \frac{dW}{dt} \quad [P] = 1 \text{ Nm/s} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$$

Wirkungsgrad (z.B. einer Maschine) ist Verhältnis von Nutzarbeit zu aufgewendeter Energie:

$$\eta = \frac{W_{Nutz}}{E_{ges}} = \frac{P_{Nutz}}{P_{ges}} \leq 1 \quad (="" \text{ nur ohne Reibung!})$$

Aus Definition des Impulses über Newton II,  $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ , folgt:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(t) dt \quad \text{Kraftstoß}$$

→ Impulserhaltungssatz: Im abgeschlossenen System (keine äußeren Kräfte wirksam) bleibt der Gesamtimpuls erhalten

$$\vec{p}_{ges} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const}$$

Folgerung: Der Bewegungszustand des System-Schwerpunktes

$$\vec{r}_S = \vec{r}_S(t) = \frac{\sum m_i \vec{r}_i(t)}{\sum m_i} \quad \text{bleibt unverändert.}$$

→ *Stoßprozesse*

Klassifizierung nach Stoßgeometrie:

- gerader Stoß: Geschwindigkeiten liegen auf Verbindungslinie,
- schiefer Stoß: G. liegen *nicht* auf Verb.linie der Schwerpunkte
- zentraler Stoß: Berührebene steht senkrecht auf Verb.linie (bei Kugeln immer erfüllt!)

... und Energiebilanz:

- elastischer Stoß: Bei Stoßprozeß geht *keine* Energie verloren
- inelastischer Stoß: Bei St.prozeß geht Energie *zum Teil* verloren
- unelastischer Stoß: maximaler Energieverlust (beide Stoßpartner bewegen sich nach Stoßprozeß gemeinsam)

→ Elastische Stoßprozesse werden durch Energie- und Impulserhaltung charakterisiert:

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad (v/u: \text{Geschw. vor/nach Stoß})$$

Spezialfälle:  $m_1 = m_2$ : Geschwindigkeiten vertauschen

$m_1 \gg m_2, v_1 = 0$ :  $m_2$  wird reflektiert (elast. Aufprall auf Wand)

Schiefer Stoß: Beziehungen gelten *vektoriell*, Impuls wird nur  $\perp$  zu Berührfläche übertragen.

Generelles Problem der Streuphysik: Stoßparameter (= Abstand der Trajektorien der stoßenden Partikel) ist unbekannt → "Stoßkreis"

bzgl. *reduzierter Masse*  $\mu$ . Sei  $v_2 = 0$ :

→  $m_1 < m_2$ : Vorwärts- und Rückwärts-Streuung möglich

$m_1 = m_2$ : Impulse nach Stoß stehen rechtwinklig aufeinander

$m_1 > m_2$ : nur Vorwärts-Streuung möglich

Inelastischer Stoß:

$$E_{kin}^{(1)} = E_{kin}^{(2)} + W_{def} \quad (W_{def} \text{ ist unbekannt!})$$

Spezialfall unelastischer Stoß:  $u_1 = u_2$  – beide Körper bewegen sich nach Stoßprozeß gemeinsam – "ballistisches Pendel". Für  $v_2 = 0$ :

$$\frac{m_1}{2} v_1^2 = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 + W_{def}$$

$$\rightarrow W_{def} = \frac{\mu}{2} v_1^2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} E_{kin}^{(1)}$$

ist maximal möglicher Wert des Energieverlustes bei Stoßprozeß.

Bei  $m_1 = m_2, v_1 = -v_2$ :  $W_{def} = E_{kin}^{(1)}$  – alle Energie geht verloren!

→ Raketenantrieb: Beschleunigung des (treibstoffgefüllten) Raketenkörpers kommt durch Impulserhaltung bei Ausstoß der Verbrennungsgase (mit Geschwindigkeit  $c$ ) zustande

$$\frac{dm}{m} = -\frac{1}{c} dv \rightarrow \int_{m_0}^{m_R} \frac{dm}{m} = -\frac{1}{c} \int_0^{v_{\max}} dv \rightarrow v_{\max} = -c \ln \frac{m_R}{m_0}$$

( $m_0, m_R$ : Startmasse, Leermasse der Rakete)

Dynamik von Drehbewegungen:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{Drehmoment}$$

ist Ursache einer Winkelbeschleunigung  $[M] = 1 \text{ Nm}$

und führt zu Drehimpuls

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = mr^2 \vec{\omega} \quad [L] = 1 \text{ Nms}$$

Mit der Definition

$$J = mr^2 \quad [J] = 1 \text{ kgm}^2$$

(Trägheitsmoment; in dieser Form *nur* für Massepunkt gültig!) folgt das *dynamische Grundgesetz der Rotation*:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (J\vec{\omega}) = J\vec{\alpha} = \vec{M}$$

Damit wird die Veränderung des Drehimpulses

$$\Delta\vec{L} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}(t) dt$$

Arbeit, kinetische Energie und Leistung:

$$W_{rot} = \int \vec{M} d\vec{\varphi}, \quad E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} J\omega^2, \quad P = \frac{dW}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

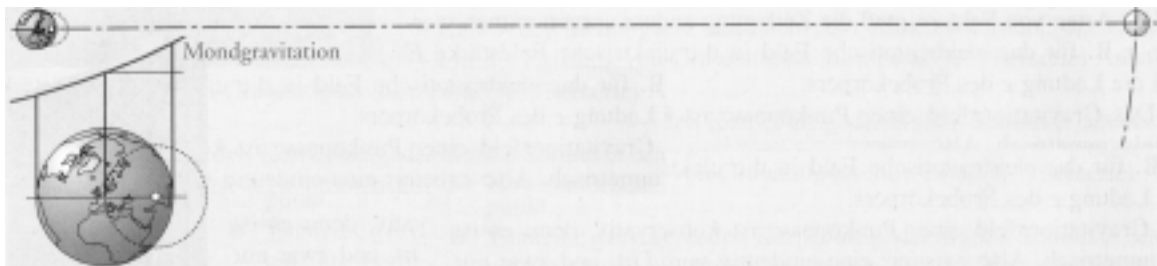
Analogie der Dynamik von Translation und Rotation

<u>Größe</u>	<u>Translation</u>	<u>Rotation</u>
Zeit	$t$	$t$
Weg	$\vec{r}$	$\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit	$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$	$\frac{d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{\omega}$
Beschleunigung	$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$	$\frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} = \vec{\alpha}$
Masse	$m$	$J$ (Trägheitsmoment) (= $mr^2$ für Massepunkt)
Impuls	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$ (Drehimpuls)
		$(\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p})$
Kraft	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$  (= $m \cdot \vec{a}$ für $\frac{dm}{dt} = 0$ )	$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ (Drehmoment)  (= $J \cdot \vec{\alpha}$ für $\frac{dJ}{dt} = 0$ )
		$(\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F})$
Arbeit	$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$	$W = \int_{\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}_2} \vec{M} d\vec{\varphi}$
Leistung	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$	$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$
kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} mv^2$	$E_{kin} = \frac{1}{2} J\omega^2$

- Drehimpulserhaltung: Ohne äußere Momente bleibt Gesamtdrehmoment  $\vec{L}$  eines (abgeschlossenen) Systems erhalten:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \Leftrightarrow \sum_k J_k \vec{\omega}_k(t_1) = \sum_k J_k \vec{\omega}_k(t_2)$$

- Eine Kraft auf einen Körper, die – unabhängig von dessen Lage – stets auf dieselbe Position im Raum zeigt, heißt *Zentralkraft*. Das Zentrum muß *nicht* die Position eines anderen Körpers sein. Beisp.: Rotation des Systems Erde-Mond um gemeinsamen Schwerpunkt



- Zentrifugalkraft erzeugt auf mondabgewandter Seite 2. Flutberg!
- Flächensatz: Ortsvektor zu Körper, auf den Zentralkraft wirkt, überstreicht wegen Drehimpulserhaltung pro Zeiteinheit konstante Fläche
- Astronomie: → 2. Kepler'sches Gesetz!
- 1. Kepler'sches Gesetz: Planeten kreisen um Sonne auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt das Zentralgestirn steht. Ursache?
- Kegelschnittbahn ( $a, b$ : große/kleine Halbachse) kommt nur dann aus Energie- und Impulserhaltung zustande, wenn

$$E_{pot}(r) \propto \frac{1}{r} \Leftrightarrow F(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Für Gravitation  $F_{grav}(r)$  als Ursache der Planetenbewegung:

$$E_{pot}(r) = -\frac{L^2}{2m} \cdot \frac{1}{pr} \quad (p = b^2/a: \text{Ellipsenparameter}),$$

$$L = mb\sqrt{\gamma M/a} \quad \text{und} \quad E_{tot} = -\gamma Mm/2a \quad \text{für Ellipse}$$

→ Kepler'sche Gesetze:

- 1) Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit Sonne im Brennpunkt
- 2) Verbindungslinie Sonne–Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Flächensatz)

$$3) T^2 \propto a^3 \quad \left( T^2 = \frac{4\pi^2}{\gamma M} a^3 \right)$$

→ Ausgedehnte Starre Körper

Durch Kopplung der Massepunkte innerhalb eines Starren Körpers wird Anzahl der Freiheitsgrade auf  $f = 6$  reduziert: 1 Ortsvektor (3 Koordinaten) *plus* 1 Rotationsvektor (3 Koordinaten) beschreiben Lage oder Bewegungszustand des Körpers eindeutig.

$$\vec{r}_S = \frac{\int_V \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) d^3 r}{\int_V \rho(\vec{r}) d^3 r} \quad \text{Schwerpunkt S}$$

Ist Starrer Körper in D frei drehbar aufgehängt, so befindet sich S im stabilen Gleichgewicht senkrecht unter D. (Beweis: Liegt S *nicht* unter D, so entsteht Drehmoment  $\vec{M}$ , das den Zustand des stabilen Gleichgewichts herstellt.)

Auch für ausgedehnten Starren Körper ist

$$E_{kin}^{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

mit  $J = \sum_i r_i^2 \Delta m_i(\vec{r}_i) = \int_V r^2 \cdot \rho(\vec{r}) d^3 r$  Trägheitsmoment

(Unterscheide:  $\vec{r}$  – Ortsvektor;  $r$  – *senkrechter* Abstand zur Drehachse!)

z.B.: Zylinder:  $J = \frac{1}{2} mR^2$ ; Hohlzylinder:  $J = mR^2$ ;

Kugel:  $J = \frac{2}{5} mR^2$

- Experimentelle Bestimmung von Trägheitsmomenten z.B. über Drehschwingung. Momentenansatz: Rücktreibendes Moment (bei Auslenkung des Drehtisches aus Ruhelage) = – Moment aufgrund der Trägheit bei beschleunigter Drehbewegung

$$\vec{M}_{rück} = -\vec{M}_{träge} \rightarrow J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + D \cdot \varphi = 0 \text{ Schwingungs-DG1.}$$

Lösung:

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega t + \omega_0 \sin \Omega t$$

( $\varphi_0, \omega_0$ : Amplituden von Auslenkung, Winkelgeschwindigkeit;  
 $\Omega$ : Kreisfrequenz der Schwingung) mit

$$\Omega = \sqrt{D/J} \quad (\text{Kreisfrequenz und}$$

$$T = 2\pi \sqrt{J/D} \quad \text{Schwingungsdauer)}$$

- Bestimme  $J$  und  $D$  des Drehtisches aus 2 Messungen von  $T$ , in denen sich Anordnung um bekanntes  $\Delta J$  unterscheidet. Wird nun unbekanntes  $J$  montiert, so kann dieses aus  $T$  bestimmt werden.

Satz von Steiner:

$J_A = J_S + m \cdot r_{S-A}^2$  Trägheitsmoment eines Körpers um Achse A, dessen Trägheitsmoment  $J_S$  um Schwerpunktsachse bekannt ist.

Anwendung: Reversionspendel ("Physikalisches Pendel")

Schwingungsdauer  $T = T(r_{S-A})$  besitzt *Minimum* als Funktion des Abstands  $r_{S-A}$ ; für  $r_{S-A} \rightarrow 0$  und  $r_{S-A} \rightarrow \infty$ :  $T \rightarrow \infty$ . Für jedes  $T = T(r_{S-A}) > T^{min}$  gibt es zwei Werte  $r_{S-A}^{(1)}$  und  $r_{S-A}^{(2)}$ .

Die reduzierte Pendellänge  $l_R = l_R(T) = r_{S-A}^{(1)} + r_{S-A}^{(2)}$  ist die gleiche Länge, die auch ein Fadenpendel ("Mathematisches Pendel") gleicher Schwingungsdauer  $T$  besitzen würde.

→ Gleichgewichtsbedingung am Starren Körper:

$$\sum_i \vec{F}_i^a = \vec{0} \quad \text{und} \quad \sum_i \vec{M}_i^a = \vec{0}$$

→ Jede Kraft  $\vec{F}$ , die in irgendeinem Punkt (z.B. außerhalb des SP) angreift, kann durch eine Kraft  $\vec{F}'$  und ein Drehmoment  $\vec{M}$  ersetzt werden, die beide am SP wirken.

→ Das Trägheitsmoment  $J$  ist im allgemeinen keine skalare Größe, sondern ein Tensor 2. Grades:

$$\vec{\vec{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}$$

→ Drehimpuls  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  sind nicht notwendigerweise collinear:

$$\vec{L} = \vec{\vec{J}} \cdot \vec{\omega} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{xx}\omega_x + J_{xy}\omega_y + J_{xz}\omega_z \\ J_{yx}\omega_x + J_{yy}\omega_y + J_{yz}\omega_z \\ J_{zx}\omega_x + J_{zy}\omega_y + J_{zz}\omega_z \end{pmatrix}$$

... oder in Index-Schreibweise: 
$$L_i = \sum_k J_{ik} \omega_k$$

Damit wird  $\vec{\vec{J}}$  für ein System von  $j = 1 \dots n$  Massen mit

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases} : \text{Kronecker-Symbol und } \begin{cases} x_1 \equiv x \\ x_2 \equiv y \\ x_3 \equiv z \end{cases} :$$

$$J_{ik} = \sum_j m_j (r_j^2 \delta_{ik} - x_i x_k) \quad \text{bzw.} \quad J_{ik} = \int (r^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dm$$

→ Jeder Körper hat 3 Achsen (Hauptträgheitsachsen – HTA), für die  $\vec{J}$  Diagonalform besitzt (Neben-Diagonalelemente = 0), die aufeinander  $\perp$  stehen und sich im SP schneiden (symmetrische Körper besitzen *äquivalente* Achsen; Symmetrieachse = HTA). Rotation um solche Achse ist *freie* Rotation (es treten keine Lagerkräfte auf).

→ Konsequenz der Tensor-Eigenschaften von  $\vec{J}$ : Sind (momentane) Drehachse  $\vec{\omega}$  und Figurenachse eines Kreisels verschieden, so stimmen Richtungen von Drehimpuls  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  *nicht* überein!

→  $\vec{\omega}$  rollt um ortsfesten Vektor  $\vec{L}$  (Erhaltungssatz!) auf Kegelmantel ab (*Rastpolkegel*); gleichzeitig rollt  $\vec{\omega}$  auch auf (anderem) Kegelmantel um Figurenachse ab (*Gangpolkegel*), sodaß Rastpol- und Gangpolkegel *ineinander* abrollen. Für Beobachter wird nur eine Taumelbewegung der Figurenachse sichtbar → *Nutation*

$$\omega_{nut} = \frac{J_{zz}}{J_{xx}} \cdot \omega$$

→ Wirkt konstantes Drehmoment  $\vec{M}$  auf rotierenden Kreisel mit Drehimpuls  $\vec{L}$ , so weicht dieser wegen

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

*senkrecht* zu  $\vec{F}$  aus. Wegen  $d\vec{L}/dt = \text{const.}$  ändert sich Richtung von  $\vec{L}$  pro Zeiteinheit  $\Delta t$  um konstantes  $\Delta\vec{L}$  → *Präzession*. Für Kreisel, der unter Schwerkraft um Figurenachse rotiert (z.B. Unterstützung der Achse seitlich im Abstand  $r$  vom Schwerpunkt S):

$$\omega_{präz} = \frac{mgr}{J_{zz} \cdot \omega}$$

- Konsequenz der Tensor-Eigenschaften von  $\vec{J}$ : Sind (momentane) Drehachse  $\vec{\omega}$  und Figurenachse eines Kreisels verschieden, so stimmen Richtungen von Drehimpuls  $\vec{L}$  und  $\vec{\omega}$  *nicht* überein!  
 →  $\vec{\omega}$  rollt um ortsfesten Vektor  $\vec{L}$  (Erhaltungssatz!) auf Kegelmantel ab (*Rastpolkegel*); gleichzeitig rollt  $\vec{\omega}$  auch auf (anderem) Kegelmantel um Figurenachse ab (*Gangpolkegel*), sodaß Rastpol- und Gangpolkegel *ineinander* abrollen. Für Beobachter wird nur eine Taumelbewegung der Figurenachse sichtbar → *Nutation*

$$\omega_{nut} = \frac{J_{zz}}{J_{xx}} \cdot \omega$$

- Wirkt konstantes Drehmoment  $\vec{M}$  auf rotierenden Kreisel mit Drehimpuls  $\vec{L}$ , so weicht dieser wegen

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

senkrecht zu  $\vec{F}$  aus. Wegen  $d\vec{L}/dt = \text{const.}$  ändert sich Richtung von  $\vec{L}$  pro Zeiteinheit  $\Delta t$  um konstantes  $\Delta\vec{L}$  → *Präzession*. Für Kreisel, der unter Schwerkraft um Figurenachse rotiert (z.B. Unterstützung der Achse seitlich im Abstand  $r$  vom Schwerpunkt  $S$ ):

$$\omega_{präz} = \frac{mgr}{J_{zz} \cdot \omega}$$

### Mechanik deformierbarer Körper

- *Aggregatzustand* eines Körpers (gasförmig, flüssig, fest) hängt von Wechselwirkung zwischen seinen Molekülen (oder Atomen) ab. Gibt es Bereich zwischenmolekularer Abstände, in dem sich Teilchen gegenseitig *anziehen*, so kommt es zur *Kondensation* (Flüssigkeit oder Festkörper), andernfalls liegt Gaszustand vor. Veränderungen im Aggregatzustand können i.A. durch Temperaturveränderung hervorgerufen werden → Thermodynamik (siehe später)

→ Typen der mechanischen Deformation von Festkörpern:  
Dilatation (Dehnung/Stauchung) – Scherung – Torsion – Biegung.

(1) Dilatation:

$$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon \quad (\text{Dehnung}) \qquad \sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{Spannung})$$

→  $\varepsilon = \alpha \cdot \sigma$  Hooke'sches Gesetz mit  $\alpha$ : Dehnungskoeffizient

Verformung bewirkt Gegenkraft im Körper:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad \text{mit } E = 1/\alpha: \text{Elastizitätsmodul (Young-Modul)}$$

→ Linearität im Hooke'schen Gesetz folgt aus Harmonizität des Potentials zwischen den Molekülen im FK. Anharmonizitäten bei größerer Verformung → Nichtlinearitäten bei  $\sigma > \sigma_p$ .

Verallgemeinerter Zusammenhang von Spannung und Dehnung:

$$\vec{\sigma} = \vec{E} \cdot \vec{\varepsilon}: \qquad \vec{\sigma}, \vec{\varepsilon}: \text{Tensoren 2. Ordnung}$$

Unterscheide *Volumenkräfte* (Beispiel: Gewicht) und *Flächenkräfte* (Beispiel: Spannungen), die im Körper wirken!

$$\vec{F}_{gew} = \vec{g} \int_V \rho(\vec{r}) dV; \qquad \vec{F}_{sp} = \oint_O \vec{P}_n d\vec{A} = \oint_O \vec{\sigma} \cdot \vec{n} d\vec{A}$$

Als Verknüpfung zweier Tensoren 2. O. ist  $\vec{E}$  Tensor 4. Ordnung!

Aber: Reduktion der 81 unabhängigen Komponenten von  $\vec{E}$  durch Symmetrie von  $\vec{\sigma}, \vec{\varepsilon}$ : 21 unabh. Komponenten beschreiben das komplizierteste *anisotrope* System (trikline Kristalle). Weitere Reduktion durch Symmetrien des Materials! Für *isotrope* Materialien:

$$\sigma_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \lambda\delta_{ik}\Theta \qquad \lambda, \mu: \text{Lamé-Moduln,}$$

mit  $\delta_{ik}$ : Kronecker-Symbol und

$$\Theta = \sum \varepsilon_{ii} \qquad \text{Spur des Tensors } \vec{\varepsilon}.$$

→ Mit *zwei* Materialkonstanten lassen sich die elastischen Eigenschaften isotroper Materialien *vollständig* beschreiben!

→ Young-Modul als Funktion der Lamé-Koeffizienten:

$$E = \frac{\mu}{\mu + \lambda} (2\mu + 3\lambda)$$

Querkontraktion:

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \cdot F_{zz}$$

Poissonzahl  $\sigma = -\epsilon_{xx}/\epsilon_{zz}$ : 
$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$$

→ Hooke'sches Gesetz f. Scherung ( $\gamma$  S.-Winkel,  $\tau$  ext. S.-Spannung):

$$\tau = G \cdot \gamma \quad G \equiv \mu : \text{Schubmodul (Schermodul)}$$

Torsion ist eine Form der Scherung. Richtmoment:

$$\vec{M} = \frac{\pi}{2} G \frac{R^4}{l} \vec{\phi} \quad (\text{runder Draht mit Radius } R, \text{ Länge } l)$$

→ Biegung führt zu Dehnung *und* Stauchung im Balken an verschiedenen Stellen in dessen Querschnitt ( $R$ : Krümmungsradius):

$$\sigma_{xx}(z) = E \frac{z}{R} \quad \text{wenn } x\text{-Achse } (z = 0) \text{ durch Flächenschwerpunkt geht} \rightarrow \text{bei } z = 0: \text{ "neutrale Faser"}$$

Biegesteifigkeit ist proportional zu Flächenträgheitsmoment  $I$ :

Biegesteifigkeit ist proportional zu Flächenträgheitsmoment  $I$ :

$$\text{Mit } I = \int_{z_0}^{z_1} z^2 dz: \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{E \cdot I} \quad (\text{Bernoulli-Euler-Theorem}).$$

$$\text{mit } \mathfrak{K} = \frac{1}{R} = \pm \frac{z''(x)}{(1 + z'^2(x))^{3/2}} \quad \text{Krümmung } \mathfrak{K} \text{ einer Kurve } z(x)$$

folgt 
$$z(x) = -\frac{F_{ext}}{E \cdot I} \cdot \left( l \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$$

→ allseitiger Druck → isotrope Kompression:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\kappa \cdot \Delta p = -\frac{1}{K} \cdot \Delta p \quad [p] = 1 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$$

$\kappa$ : Kompressibilität;  $K$ : Kompressionsmodul. Mit  $p =$

$\sigma_{ii}$  ergibt sich

$$K = \frac{3}{2\mu + 3\lambda} \quad [K] = 1 \text{ N/m}^2, [\kappa] = 1 \text{ m}^2/\text{N}$$

→ Elastische Energiedichte:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{2} E \cdot \varepsilon^2 \text{ (Elongation)} \quad \frac{W}{V} = \frac{1}{2} G \cdot \gamma^2 \text{ (Scherung)}$$

→ Mechanik von Flüssigkeiten und Gasen

Druck ist skalare Größe:

$$\vec{\sigma} = p \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{in Flüssigkeiten und Gasen.}$$

Moleküle sind frei gegeneinander verschiebbar → keine Scherkräfte, Oberfläche stets lokal  $\perp$  auf resultierender Kraft. Hydrostatischer Druck:

$$p(z) = \rho_{Fl} g (z_0 - z)$$

→ Auftrieb:

$$\vec{F}_{Auftr} = -\rho_{Fl} g V_{Körper} \cdot \vec{e}_z$$

→ Oberflächenspannung entsteht durch fehlende Kompensation zwischenmolekularer Kräfte in kondensierten Phasen an deren Oberfläche oder Grenzfläche zu anderen Phasen:

$$\sigma = \Delta E_{Ob} / A$$

$$[\sigma] = 1 \text{ J/m}^2 = 1 \text{ N/m}$$

- Oberflächen, die nur unter dem Einfluß der Grenzflächenspannung stehen, sind *Minimalflächen*. Beispiel: Seifenblase (wegen sehr dünner Kugelschale ist Gewichtskraft  $\ll$  Oberflächenspannung):

$$\Delta p = \frac{4\sigma}{R} \quad (\text{Kugel: } \Delta p = \frac{2\sigma}{R})$$

- Steht Flüssigkeit in Kontakt mit Festkörper (Wand), so tritt neben WW der Moleküle untereinander ( $\rightarrow$  *Kohäsion*) WW zwischen Flüssigkeitsmolekülen und Festkörpermolekülen auf ( $\rightarrow$  *Adhäsion*)  
 $\rightarrow$  *Kapillarität*: Für Adhäsion  $>$  Kohäsion benetzt dünner Flüssigkeitsfilm die Gefäßwand auch über Flüssigkeitsspiegel  $\rightarrow$  Meniskus (in Kapillare: Flüssigkeitssäule) steigt an Wand *auf*. Ist Kohäsion  $>$  Adhäsion: Meniskus wird an Wand *herab* gedrückt. In Kapillare:

$$\Delta h = \frac{2\sigma}{r\rho g} \quad (\text{für vollständig bzw. nicht-benetzende Flüssigkeit})$$

- An 3-Phasen-Kontaktlinie (z.B. fest-flüssig-gasförmig) kommt es zu *Randspannungen*  $\sigma_{ij}$ , die den *Kontaktwinkel*  $\Theta$  der Flüssigkeit am Festkörper bestimmen:  $\sigma_{fest-gas}$  ist klein;  $\sigma_{fl-gas}$  ist stets  $> 0$  (Oberflächenspannung) und zeigt in Richtung der Grenzfläche;  $\sigma_{fest-fl}$  kann  $< 0$  sein (Adhäsion überwiegt) oder  $> 0$  sein (Kohäsion überwiegt). Kräftegleichgewicht bzgl. der Festkörper-Oberfläche:

$$\rightarrow \sigma_{fest-fl} - \sigma_{fest-gas} = \sigma_{fl-gas} \cos \Theta \quad (\text{Young-Gleichung})$$

### Strömungsmechanik

Unterscheide inkompressible – kompressible; ideale (reibunglose) – reale Flüssigkeiten und stationäre – instationäre Strömungen. Mittel zur mathematischen Beschreibung: *Vektorfelder*

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \text{ Geschw.-Feld, } \vec{j}(\vec{r}) = \rho \cdot \vec{v}(\vec{r}) \text{ Stromdichte}$$

- $\phi = \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$  Strom  $\rightarrow$  Massetransport durch Oberfläche  $\vec{A}$  (Normalenvektor  $\perp$  zu Fläche, Länge  $\propto$  Fl.-inhalt)

→ Quellen und Senken in Vektorfeldern:

Fließt aus Volumenelement zum Zeitpunkt  $t$  mehr heraus als hinein, nimmt dort entweder die Dichte  $\rho$  ab oder es besteht *Quelle* in  $dV$ .

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \equiv \operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} > 0$$

mit  $\nabla \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ : Nabla-Operator. Ist andernfalls

$\operatorname{div} \vec{v} < 0$ , so besteht *Senke* in  $dV$ .

→ Kontinuitätsgleichung:

$$\rho \cdot \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \vec{j} = -\frac{d\rho}{dt} \text{ (Differential-Form):}$$

Ein-/Ausstrom = Quelldichte in  $dV$  = Massendichte-Veränderung  
Integralform (Umformung des Flächenintegrals in das Volumenintegral heißt Satz von Gauß/Ostrogradski):

$$\Delta\phi = \oiint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho \cdot \operatorname{div} \vec{v} \, dV = -\iiint_V \frac{d\rho}{dt} \, dV$$

→ Anwendung auf inkompressible Flüssigkeiten: → lokale Geschwindigkeit ist umgekehrt proportional zu Querschnitt

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

→ Energieerhaltung:

statischer Druck + dynamischer Druck + geodätischer Druck = const

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho gh = \text{const} \quad \text{(Bernoulli-Gleichung)}$$

Anwendung: Prandtl'sches Staurohr:  $v = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho} gh}$

- Strömungskraft auf Körper des Querschnitts  $A$ : Form des Körpers bestimmt Widerstandsbeiwert ( $c_w$ -Wert)

$$F_w = c_w \frac{\rho}{2} v^2 \cdot A$$

- Reibung in Flüssigkeiten (*Viskosität*) bewirkt Gradienten im Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$  und damit Druckabfall → Wirbel!

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v} = \text{rot } \vec{v}$$

Wirbel in Strömung  $\leftrightarrow \text{rot } \vec{v} \neq \vec{0}$ !

- Kraft notwendig, um strömende Flüssigkeit in Bewegung zu halten

$$\vec{F} = \eta \cdot A \cdot \frac{d\vec{v}}{dz} \quad \eta: \text{Viskosität; } [\eta] = 1 \text{ Ns/m}^2$$

Viskose Schubspannung:

$$\sigma_\eta = \eta \cdot \frac{d\vec{v}}{dz}$$

Temperaturabhängigkeit kommt durch molekulare Ursachen (Rauhigkeit der aneinander vorbeigleitenden Atomschichten) zustande → Boltzmann-Verteilung in Thermodynamik:

$$\eta(T) \propto e^{-\text{const}/T}$$

Kraftdichte im Strömungsfeld:

$$\vec{f}_R = \frac{d\vec{F}_R}{dV} = \eta \Delta \vec{v} = -\nabla p \quad \Delta \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{pmatrix} : \text{Laplace-Operator}$$

→ Strömung durch zylindrische Röhre (oder zwischen Platten):

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2) \quad \left( v(r) = \frac{1}{2\eta} \cdot \frac{dp}{dz} (d^2 - x^2) \right)$$

→ Parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil!

$$v_{max} = \frac{1}{4\eta} \cdot \frac{dp}{dz} R^2 \quad \text{Maximal-Geschwindigkeit}$$

Fluß durch Rohr:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dz} \cdot R^4 \quad (\text{starke Abhängigkeit von } R!)$$

Druckabfall und Strömungswiderstand:

$$\Delta p = \frac{8\eta l}{\pi R^4} \cdot \frac{dV}{dt} \quad \left( \phi = \frac{8\eta l}{\pi R^4} : \text{Strömungswiderstand} \right)$$

Durchschnittsgeschwindigkeit und notwendige Kraft:

$$\bar{v} = \frac{\Delta p}{8\eta l} \cdot R^2 = \frac{1}{2} v_{max} \quad F_p = \frac{8\eta l}{R^2} \cdot \frac{dV}{dt}$$

→ Kraft auf Kugel in Strömung:

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta r \cdot \vec{v} \quad (\text{Stokes-Gesetz})$$

→ Allgemeine Bewegungsgleichung für Fluide: Navier-Stokes-DGL.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \left( = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \left( \nabla(\nabla \vec{v}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) \right)$$

mit den möglichen Vereinfachungen:

(1)  $\eta = 0$ : →  $\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$  →  $\vec{v}$  läßt sich aus Potential ableiten!

(2)  $(\vec{v} \nabla) \vec{v} = 0$ : → laminare Strömung;  $\vec{v}$  ändert sich nicht entlang Stromlinie

(3)  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ : → stationäre Strömung; Stromlinien unabhängig von  $t$ .

→ Übergang laminare → turbulente Strömung: beschrieben durch empirischen Parameter *Reynolds-Zahl*:

$$\text{Re} = \frac{\rho r v}{\eta}$$

laminare Strömung geht – z.B. bei Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit bei sonst festgehaltenen Parametern – unter Ausbildung der quasiperiodischen *Kármán'schen Wirbelstraße* in die chaotische Turbulenz über.

→ Schwingungen

*Freie, ungedämpfte Schwingung.* Die Schwingungs-DGL.

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \omega_0^2 s(t) = 0 \text{ ist homogene lineare DGL. 2. Ordnung}$$

mit der Lösung

$$s(t) = s_0 \cos(\omega_0 t - \varphi) = \text{Re}\left(s_0 e^{i(\omega_0 t - \varphi)}\right)$$

( $\omega$ : Kreisfrequenz,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ : Schwingungsdauer,  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ : Frequenz)

Die Darstellung  $s(t) = s_0 e^{i(\omega_0 t - \varphi)}$  in der komplexen (Euler'schen) Zahlenebene vereinfacht Berechnungen:

$$s(t) = s_0 e^{i(\omega_0 t - \varphi)} \rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = i\omega_0 s(t); \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 s(t)$$

→ *Freie, gedämpfte Schwingung:*

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

besitzt Lösung

$$s(t) = s_0 e^{i(\omega t - \varphi) - \delta t} = s_0 \cos(\omega t - \varphi) e^{-\delta t} \left(\delta = \frac{b}{2m}; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}\right)$$

→ harmonische Schwingung mit exponentiell abnehmender Amplitude

→ *Freie, gedämpfte Schwingung:*

$$s(t) = \operatorname{Re}\left(s_0 e^{i(\omega t - \varphi) - \delta t}\right) = s_0 e^{-\delta t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} t - \varphi)$$

Dämpfungsgrad:  $D^* = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{b}{2\sqrt{mD}}$ ; Verlustfaktor:  $d = D^*$ ; Güte:  $Q = \frac{1}{d}$

→ Fallunterscheidung: (1) periodische Lösung nur für  $\delta < \omega_0$ ;  
 (2) für "überkritische Dämpfung" ( $\delta > \omega_0$ ) wird Wurzel imaginär

→  $s(t) = s_0 \cos(-\varphi) e^{-\delta' t}$  mit  $\delta' = \delta \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\delta^2}}\right)$

System "kriecht" bei Auslenkung zurück zur Ruhelage ("Kriechfall")

(3) aperiodischer Grenzfall bei  $\delta = \omega_0$ : System kehrt auf schnellstem Wege zur Ruhelage zurück.

→ *Erzwungene Schwingung*: Periodische Störung von außen auf schwingfähiges System mit Dämpfung läßt sich durch *inhomogene* DGL. beschreiben:

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \frac{f_0}{m} e^{i\omega t}$$

Lösung setzt sich zusammen aus der homogenen und der *partikulären*

Lösung:  $s_{inh}(t) = s_{homo}(t) + s_{part}(t)$ . Für  $t \rightarrow \infty$  gewinnt  $s_{part}(t)$ .

Für  $\omega \approx \omega_0$  wird Amplitude der erzwungenen Schwingung maximal:

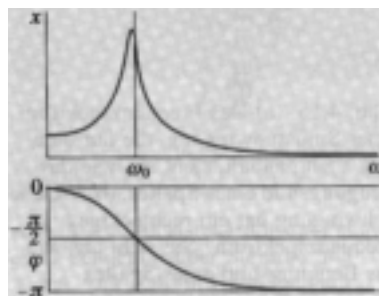
→ *Resonanz!*

$$s_0^{part} = \frac{f_0}{m \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2D^* \omega_0 \omega)^2 \right]^{1/2}}$$

Amplitudenresonanzfunktion

$$\tan \varphi^{part} = \frac{2D^* \omega_0 \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Phasenresonanzfunktion



→ Schwingungen überlagern sich *ungestört* (→ *Interferenz*). Die Summe zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz ist wieder harmonische Schwingung. Aus  $s_1(t) = s_{0,1} \cos(\omega t)$ ,  $s_2(t) = s_{0,2} \cos(\omega t - \varphi)$  wird  $s(t) = s_1(t) + s_2(t) = s_0 \cos(\omega t - \varphi')$  mit

$$s_0^2 = s_{0,1}^2 + 2s_{0,1}s_{0,2} \cos^2 \varphi + s_{0,2}^2, \quad \tan \varphi' = \frac{s_{0,2} \sin \varphi}{s_{0,1} + s_{0,2} \cos \varphi}$$

Resultierende Amplitude kann größer oder kleiner sein als Eingangswerte. Für  $s_{0,1} = s_{0,2}$ ,  $\varphi = \pi$  ergibt sich  $s_0 = 0$  (*destruktive Interferenz*).

→ Sind Frequenzen unterschiedlich, aber  $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$  klein, so entsteht *Schwebung*. Für  $s_{0,1} = s_{0,2}$  wird mit  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ :

$$s(t) = 2s_{0,1} \cdot \cos \omega t \cdot \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$$

→ Fourieranalyse: Jedes beliebige periodische Signal  $y(t) = y(t + \frac{2\pi}{\omega_0})$  kann als Summe harmonischer Funktionen ausgedrückt werden:

$$y(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)] \quad \text{mit}$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \cos(k\omega_0 t) dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T y(t) \sin(k\omega_0 t) dt$$

oder komplex (*Fouriertransformation, Rücktransformation*):

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} y(t) e^{-ik\omega_0 t} dt \quad (k = -\infty \dots \infty)$$

→ Ortsraumdarstellung  $y = y(t)$  und Darstellung als Frequenzspektrum  $c_k = c_k(\omega)$  ist vollkommen äquivalent. Vorteil der Fourierdarstellung: Datenreduktion; komplizierte Funktionen können oft bereits durch Angabe einiger weniger Fourier-Koeffizienten gut angenähert werden. Anwendung in vielen verschiedenen Bereichen der Physik und Informationstechnik.

→ Gekoppelte Pendel: Schwingender Oszillator hat Energie gespeichert. Werden Oszillatoren (z.B. durch Feder) miteinander verbunden, so wird Energie zwischen den Energiespeichern ausgetauscht. Resultierende Bewegungszustände: Schwebungen zwischen den (symmetrischen und antisymmetrischen) *Normalschwingungen* (Beispiel: Federpendel mit Kopplung  $D_{12}$ ):

$$\omega_0^{symm} = \sqrt{D/m} \qquad \omega_0^{antisymm} = \sqrt{(D+2D_{12})/m}$$

$$\omega^{Schw} \approx \omega_0 \frac{D_{12}}{D} \qquad \text{Schwebungsfrequenz } (D_{12} \ll D)$$

Wellen: Bei Übergang von Situation der 2 gekoppelten Oszillatoren zu fortlaufender Kette (❶, ❷, ❸ ...) gekoppelter Oszillatoren wird Energie, die von ❶ auf ❷ übertragen wird, an ❸ weitergegeben und kehrt daher nicht zu ❶ zurück: Ein *Wellenzug* entsteht.

Welle mit Auslenkung in Ausbreitungsrichtung: *Longitudinalwelle*;  
 Welle mit Auslenkung  $\perp$  zu Ausbreitungsrichtung: *Transversalwelle*.  
 Beschreibung der Auslenkung in Zeit und Raum:

$$\vec{y}(\vec{x}, t) = y_0 \vec{e}_y \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \varphi)} \quad \text{mit}$$

$y_0$ : Amplitude,  $\vec{e}_y$ : Polarisation,  $\vec{x} = x \vec{e}_x$ : Ausbreitungsrichtung,  
 $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ : Wellenvektor (eindimensional:  $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ),  
 $c$ : Ausbreitungsgeschwindigkeit,  $\lambda$ : Wellenlänge.

→ Auslenkung  $\vec{y}$  muß nicht notwendigerweise Verschiebung von Massen, sondern kann *irgendeine* Vektorgröße sein, die an ihre Umgebung gekoppelt ist (z.B. elektromagnetische Wellen)!

→  $w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 y_0^2$  Energiedichte,  $s = wc$  Energiestromdichte ("Intensität")

→ Die *Wellengleichung*  $\frac{d^2 s(x, t)}{dt^2} = c^2 \frac{d^2 s(x, t)}{dx^2}$  (d'Alembert)

ist DGL., deren Lösung  $\vec{s}(\vec{x}, t) = s_0 \vec{e}_y \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x} - \varphi)}$  ist.

→ z. B. für gespannte Saite:

$$c = \sqrt{\frac{F_{ext}}{\rho \cdot A}}$$

- Ebene Welle  $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx - \varphi)$  ist nur *eine* von vielen möglichen Lösungen der Wellengleichung. Eine andere ist die *Kugelwelle*  $s(\vec{r}, t) = \frac{s_0}{r} \cos(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \varphi)$ . → Randbedingungen!
- Bei *Reflektion* einer Welle am feststehenden Ende einer Pendelkette Phasensprung um  $\pi$ . Reflektion am freien Ende: kein Phasensprung
- Superpositionsprinzip: Wellen überlagern sich *ungestört*. Euler-Konstruktion kann *Zeit- oder Ortsabhängigkeit* darstellen; Ortsabhängigkeit kann 2 Richtungen einnehmen.

Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz  $\omega$  und Ausbreitungsrichtung  $\vec{k}$ : Amplituden verstärken sich oder schwächen sich ab, je nach Phasenbeziehung. Für  $\varphi = \pi$ ,  $s_{0,1} = s_{0,2}$ : totale Auslöschung.

$$s = s_1 + s_2 = 2s_{0,1} \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) e^{i(\omega t + \vec{k}\vec{x} - \Delta\varphi/2)}$$

gegenläufige Wellen,  $\vec{k}_2 = -\vec{k}_1$ , z.B. Überlagerung einer reflektierten mit einer einlaufenden Welle: → Stehende Wellen

$$s = 2s_{0,1} \cos(\vec{k}\vec{x}) e^{i\omega t}$$

gleiche Frequenz, aber verschiedene Ausbreitungsrichtungen:

$$s = 2s_{0,1} \cos\left(\frac{(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\vec{k}_1 + \vec{k}_2}{2}\vec{r} + \omega t\right)}$$

Resultierende Welle breitet sich in Richtung der Winkelhalbierenden  $(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 / 2)$  aus; Amplitude ist *quer* zur Ausbreitungsrichtung  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$  moduliert.

- Auch zeitlich begrenzte – generell nicht-periodische – Signale können fourier-transformiert werden: Anstelle von diskreten Frequenzen tritt ein kontinuierliches Frequenz-Spektrum, anstelle der Fourier-Summe das Fourier-Integral:

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} s(t) e^{i\omega t} dt \quad \leftrightarrow \quad f(\omega) = \text{FT}\{s(t)\}$$

Rücktransformation:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \leftrightarrow \quad s(t) = \text{FT}^{-1}\{f(\omega)\}$$

Da  $\vec{k} / \vec{r}$  in derselben Beziehung zueinander stehen wie  $\omega / t$ , gilt auch

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} s(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}, \quad s(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k}$$

- Frequenzspektren zeitlich begrenzter Signale, z.B. ged. Schwingung:

$$\text{FT}\left\{e^{-\delta t} \cdot \cos \omega' t\right\} = \frac{\delta}{\delta^2 + (\omega - \omega')^2}$$

→ *Lorentzkurve* um die Zentralfrequenz  $\omega'$  herum, also ein kontinuierliches Frequenzspektrum mit Schwerpunkt bei  $\omega'$ .

- Wellenpaket mit Gaußfunktion als Einhüllender:

$$\text{FT}\left\{e^{-\frac{a^2 t^2}{2}} \cdot \cos \omega' t\right\} = e^{-\frac{(\omega - \omega')^2}{2a^2}}$$

ist wieder Gaußfunktion (im Frequenzraum!). Je breiter (Wert v.  $a$ !) Gaußfunktion im Eingangssignal, desto schmaler Frequenzspektrum.

→ Unschärferelation:  $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$ .

- Ein einmal im Raum entstandenes Wellenpaket läuft nur dann *nicht* auseinander, wenn für alle Frequenzanteile die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt! Für Wellen in Materie ist dies i.A. *nicht* der Fall → Dispersion! Unterscheide *Phasengeschwindigkeit*  $c = \omega/k$  und *Gruppengeschwindigkeit*  $c = d\omega/dk$ .

→ Für elastische Medien gelten Bewegungsgleichungen

$$\frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{d^2 \vec{v}}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 p}{dt^2} = \frac{1}{\kappa \rho} \frac{d^2 p}{dx^2}.$$

→ In derartigen Medien: *Schallwellen!* Phasengeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\kappa \rho}} \quad (\kappa: \text{Kompressibilität, } \rho: \text{Dichte})$$

Gase: adiabatische Kompressibilität  $\kappa' = \frac{1}{\gamma} \kappa$ . (“adiabatisch” = ohne Wärmeaustausch;  $\gamma$ : Adiabatenexponent → Thermodynamik).  
 $p$  und  $\vec{v}$  sind um  $\pi/2$  phasenverschoben (Schalldruck-Knoten ↔ Schallschnelle-Bauch).

→ Reflexion der Welle, z.B. am Ende einer Orgelpfeife, führt zu *Stehenden Wellen* (Phasensprung  $\pi$  am geschlossenen Ende).  
 Eigenschwingungsspektrum offen/offen (geschl./geschl.) –  
 offen/geschlossen:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad - \quad \lambda_n = \frac{4l}{2n-1} \quad (l: \text{Länge der Pfeife})$$

( $n = 1$ : Grundschiwingung,  $n = 2, 3, 4, \dots$ : Obertöne)

→ Charakteristischer Klang von Schallkörpern (Musikinstrumenten)

→ Phänomene bei Wellenausbreitung:

Streuung, Brechung, Beugung können nach Huygens'schem Prinzip verstanden werden:

“Breitet sich Welle im homogenen Medium aus, so kann Geometrie der Wellenfront konstruiert werden, indem man annimmt, die durchgehende Wellenfront rege im Medium Elementaroszillatoren, die selbst wieder Kugelwellen aussenden. Überlagerung dieser Kugelwellen ergibt die sich weiter ausbreitende Wellenfront.”

Anwendungsbeispiel: Reflexion und Brechung. Details → Optik.

→ Huygens-Prinzip → Snellius-Gesetz

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

Reflexions-/Transmissionsfaktor (aus Energiestromdichte  $s$ ):

$$R = \frac{s_{ref}}{s_{ein}} = \frac{(z_1 - z_2)^2}{(z_1 + z_2)^2}, \quad T = \frac{s_{trans}}{s_{ein}} = \frac{4z_1z_2}{(z_1 + z_2)^2}$$

( $z = \rho c$  : Wellenwiderstand)

→ Doppler-Effekt: Bewegt sich (Schall-)Quelle bzgl. Empfänger, so ist

$$\lambda' = (c \pm v)T, \quad \omega' = \frac{2\pi c}{(c \pm v)T} = \frac{1}{1 \pm v/c} \omega$$

beobachtete Wellenlänge/Frequenz in Vorwärts-/Rückwärtsrichtung.

Bei Überschallgeschwindigkeit: Mach'scher Kegel ( $\sin \alpha = \frac{c}{v}$ )

→ Teilchenphysik: Tscherenkov-Strahlung

→ Beschreibe gekoppelte Massen durch System gekoppelter DGL.:

$$\vec{D}^n \vec{s} = 0 \text{ mit}$$

$$\vec{D}^n = \begin{pmatrix} m\omega^2 & -D & -D & \dots & 0 \\ D & m\omega^2 & -D & -D & \dots \\ 0 & D & m\omega^2 & -D & -D & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & D & m\omega^2 & -D & -D \end{pmatrix}$$

→ Bestimmungsgleichung aus charakteristischem Polynom  $|\vec{D}^n| = 0$

→  $n \cdot f$  Eigenschwingungsmoden für System von  $n$  Massen mit  $f$  Freiheitsgraden. Alle möglichen Schwingungszustände können aus Grundmoden zusammengesetzt werden → IR-Spektroskopie!

→ Akustik: *Klang* (z. B. von Musikinstrument) kommt durch charakteristisches Eigenmodenspektrum des Körpers zustande. Dies ist bereits unterschiedlich für Flöte (2 offene Enden) und Pfeife (offen – geschlossen). Grundmode bestimmt *Tonhöhe*.

*Lautstärke* wird durch Intensität (Energiestromdichte) der Welle bestimmt. Wegen Energieerhaltung → Abstandsabhängigkeit:

$$\frac{s_2}{s_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Subjektives Lautstärkeempfinden ist (etwa) logarithmisch

$$\rightarrow L = 10 \cdot \lg \frac{s}{s_0} = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} \quad \text{Def. Schalldruckpegel}$$

$$[L] = 1 \text{ dB (dezibel)}$$

mit  $s_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  (Hörschwelle bei 1 kHz)

Allgemein wird das Maß dB als Dämpfungsmaß verwendet.

Physiologisch korrigiertes Lautstärkemaß:

$$\Lambda = k_f 10 \cdot \lg \frac{s}{s_0^{\text{physiol}}} \quad \text{mit } k_f = k_f(\nu), [\Lambda] = 1 \text{ Phon}$$

→ Lautstärke 10 Phon wird bei allen Frequenzen trotz unterschiedlicher Schalldruckpegel als gleich laut empfunden.

Auflösungsvermögen des menschl. Ohres: ca. 3 Phon (~ frequenz- und lautstärkeunabhängig).



- Thdyn. Temperaturskala *Kelvin*-Temperatur:  $0 \text{ K} \equiv -273.16 \dots ^\circ\text{C}$ .
- Druck:  $p = F_{\perp}/A$ ;  $[p] = 1 \text{ N}/\text{m}^2 = 1 \text{ Pa}$  (*Pascal*).  $1 \text{ bar} = 1 \text{ hPa}$   
 ( $1 \text{ at} = 1 \text{ kp}/\text{cm}^2 = 0.981 \text{ bar}$ ;  
 $1 \text{ Torr} = 1 \text{ mm Hg-Säule}$ ;  $760 \text{ Torr} = 1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar}$ )
- *Ideales Gas* ist einfaches Modellsystem (nur Massenpunkte, die untereinander ausschließlich über elastische Stöße wechselwirken)  
 Zustandsgleichung:

$$\frac{pV}{T} = \frac{p'V'}{T'} = \text{const.}$$

Referenzstoffmenge 1 mol:  $N_A = 6.022 \times 10^{23}$  Teilchen  
 (Avogadrozahl)

Damit wird Ideale-Gas-Gleichung makroskopisch:

$$pV = nRT \quad (n: \text{Anzahl der Mole in } V, \\ R: \text{Universelle Gaskonstante})$$

mit  $R = 8.314 \text{ J}/\text{mol} \times \text{K}$

... und mikroskopisch:

$$pV = nN_A k_B T = N k_B T \quad (k_B: \text{Boltzmann-Konstante})$$

mit  $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \text{ J}/\text{K}$

- “Standardbedingungen”:  $T_0 = 273 \text{ K}$ ,  $p_0 = 1 \text{ atm} = 1.013 \text{ bar}$ .  
 Damit ist für bestimmte Stoffmenge Volumen festgelegt. 1 mol besitzt das “*Molvolumen*”:

$$V_m = \frac{RT_0}{p_0} = 22.4 \text{ l}/\text{mol}.$$

- Barometrische Höhenformel: Verteilung der Teilchendichte  $N = N(h)$  und des Drucks  $p = p(h)$  in Gas im Schwerfeld

$$N(h) = N_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}} \quad p(h) = p_0 e^{-\frac{mgh}{k_B T}}$$

folgt aus Eigengewicht des Gases unter Annahme von  $pV = nRT$ . Exponentialfaktor ("Boltzmann-Faktor") setzt potentielle Energie und thermische Energie zueinander ins Verhältnis. Je größer  $E_{pot} = mgh$ , desto geringer Wahrscheinlichkeit, bei  $h$  Teilchen zu treffen.

- Kinetische Gastheorie: Zusammenhang makroskopische – mikroskopische Größen:

$$p = \frac{1}{3} \rho \overline{v^2} \quad \rightarrow \quad v_m = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$$

... und mit  $pV = nRT$ :

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k_B T \quad \text{für einatomiges, Ideales Gas.}$$

Gleichverteilungssatz: Jeder Freiheitsgrad  $f$  in System trägt im Gleichgewicht die mittlere thermische Energie  $\frac{1}{2} k_B T$ .

- Gesamte thermische Energie eines Systems:

$$\overline{E}_{th} = \frac{f}{2} k_B T$$

- Explizite Form der Geschwindigkeitsverteilung (Maxwell-Boltzmann-Verteilung):

$$F(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2/2}{k_B T}}$$

setzt thermische Energie  $k_B T$  in gleicher Weise mit kinetischer Energie  $E_{kin} = m/2 v^2$  ins Verhältnis wie barometrische Höhenformel mit potentieller Energie  $E_{pot} = mgh$ .

→ *Wärmekapazität* eines Systems ist durch Anzahl der Freiheitsgrade  $f$  bestimmt:

$$f = f_{transl} + f_{rot} + f_{vib}$$

Anzahl der Schwingungsfreiheitsgrade  $f_{vib} = 2 \times$  Anzahl der Eigenschwingungen, da *potentielle* und *kinetische* Energie separat zählen.

→  $f = f(T)$ , da nur Freiheitsgrade mit  $E < k_B T$  angeregt werden.

QM:  $E$  (z.B. für Rotationen, Vibrationen) ist im molekularen Maßstab quantisiert. → Bewegungszustände können "ausfrieren".

$$f_{rot}(\text{Atom}) = 0, f_{rot}(\text{hantelförm. Molek.}) = 2, f_{rot}(\text{bel. Molek.}) = 3$$

→ Thermische Energie notwendig für  $T$ -Erhöhung:

$$\Delta Q = \frac{M}{m_{mol}} \frac{f}{2} k_B \Delta T$$

→ *Wärmekapazität*:

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T} = \frac{M}{m_{mol}} \frac{f}{2} k_B \quad [C] = 1 \text{ J/K}$$

auf Masse bzw. Molmasse bezogen:

$$c = \frac{f}{2m_{mol}} k_B, \quad C_{mol} = N_A \frac{f}{2} k_B = \frac{f}{2} R$$

Bsp. Wärmekapazität f. Festkörper:  $f = 6$  (nur Vibrationsfreiheitsgrade, da keine Translation/Rotation der Moleküle gegeneinander)

→  $C_{mol} = 3R$  (Regel von *Dulong-Petit*) ist für schwere Elementkristalle (z.B. Pb) bei hohen  $T$  gut erfüllt.

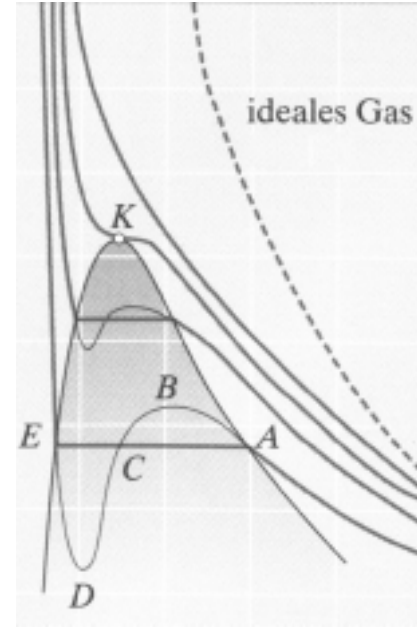
Bsp. Wasser: Besitzt eine (relativ) komplizierte Molekülstruktur

→ viele Rotations- und Vibrationszustände möglich → hohe Wärmekapazität  $c = 4185 \text{ J/(kg K)}$

- Für *Reale Gase* berücksichtige sowohl Eigenvolumen der Moleküle als auch deren attraktive WW bei kleinen gegenseitigen Abständen.

$$\left( p + a \frac{N^2}{V^2} \right) (V - Nb) = Nk_B T \quad \text{Van-der-Waals-Gleichung}$$

- Phasenübergang gas → flüssig! Unterhalb *Kritischer Temperatur*  $T_k$  besitzt Isotherme Bereich mit horizontalem Verlauf, in dem Gas bei Kompression zu Flüssigkeit kondensiert (*Phasenübergang 1. Ordnung*). Expansion: Flüssigkeit verdampft zu Gas. Für steigende  $T$  wird Koexistenzbereich schmaler, bis er bei  $T_k$  verschwindet.



- Gas kann bei Kompression über Kondensationspunkt hinaus bzw. Flüssigkeit bei Expansion über Verdampfungspunkt hinaus stabil sein (unterkühlte Gasphase/überhitzte Flüssigkeit). Im Bereich, wo *vdW*-Isotherme negative Kompressibilität zeigt, *muß* immer Phasenkoexistenz herrschen.
- *VdW*-Gleichung beschreibt Fläche im  $p, V, T$ -Raum, auf der die nach der Zustandfunktion erlaubten Systemzustände liegen. Isotherme ist Projektion entlang  $T$ -Achse,  $p, T$ -Diagramm (*Isochore*) ist Projektion entlang  $V$ -Achse. Neben gas/flüssig-Koexistenz gibt es weitere Koexistenzgebiete: gas/fest, flüssig/fest. Gas/flüssig/fest koexistieren an genau einem Punkt im Phasendiagramm: *Tripelpunkt*  $T$ .
- In Einphasengebiet sind jeweils 2 Variablen frei wählbar (wähle  $p, V \rightarrow T$  festgelegt), in 2-Phasenkoexistenzgebiet nur 1 Variable. Am Tripelpunkt sind alle Variablen eindeutig festgelegt. → Bezug der Kelvin-Temperatur auf *Tripelpunkt* von  $H_2O$ .

→ *Virial-Entwicklung* ist andere Methode, Abweichungen von idealem Verhalten zu beschreiben:

$$pV_m = RT \cdot \left( 1 + \frac{B}{V_m} + \frac{C}{V_m^2} + \frac{D}{V_m^3} + \dots \right)$$

Virial-Koeffizienten  $B = B(p, T)$ , etc. sind charakteristisch für untersuchtes Gas und werden mit zunehmender Ordnung immer kleiner. Wegen  $B < 0$  für kleine  $T$  (Anziehung zwischen Molekülen dominiert Nichtidealitäten) und  $B > 0$  für hohe  $T$  (Covolumen dominiert) existiert *Boyle-Temperatur*  $T_B$  mit  $B(T_B) = 0$ , wo Ideale Gas-Gleichung über weiten  $T$ -Bereich gut funktioniert.

→ Druck von Gas-Gemischen (*Dalton'sches Gesetz*):

$$p_{ges} = p_A + p_B = (n_A + n_B) \frac{RT}{V}$$

→ Kondensierte Phasen: Thermischer Ausdehnungskoeffizient

$$\alpha = \frac{1}{L_0} \frac{\partial L}{\partial T} \quad [\alpha] = 1/\text{K}$$

ist analog zu mechanischer Deformation

$$L(T_1) = L(T_0)(1 + \alpha\Delta T), \quad V(T_1) = V(T_0)(1 + \gamma\Delta T)$$

mit  $\gamma = 3\alpha$ : Volumen-Ausdehnungskoeffizient. Mit

$$\kappa = - \frac{1}{V_0} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_T \quad (\text{Kompressibilität}) \text{ gilt}$$

$$V(T, p) = V_0(1 + \gamma\Delta T - \kappa\Delta p).$$

→ Mechanische Arbeit in der Thermodynamik:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 \vec{F}_i \cdot d\vec{s} \quad (\vec{F}_i: \text{vom System ausgeübte Kraft!})$$

Gasexpansion:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 p dV$$

Vorzeichenkonvention:  $\Delta W < 0$ : vom System verrichtete Arbeit;  $\Delta W > 0$ : am System verrichtete Arbeit. Aber:  $W$  ist keine Zustandsfunktion, weil vom Weg im Zustandsdiagramm abhängig; daher differentielle Schreibweise:

$$\delta W = -p dV$$

Allgemein: Energie ist stets Produkt aus intensiver und extensiver Variable. Beispiel:  $p$ : intensiv,  $V$ : extensiv

→ Wärme ist Energieform, bei deren Zufuhr  $T$  eines Systems steigt. Aber: Auch Wärme ist keine Zustandsfunktion.

$$\delta Q = C dT \quad (C: \text{Wärmekapazität})$$

wie  $p = p(V)$  volumenabhängig ist  $C = C(T)$  temperaturabhängig.

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 C dT = m \int_1^2 c dT = n \int_1^2 C_{mol} dT$$

→ Gesamte thermische Energie eines Systems ist Zustandsfunktion:

$$U = N \cdot \langle E_{kin} \rangle = N \cdot \frac{f}{2} k_B T = n N_A \cdot \frac{f}{2} k_B T = n \cdot \frac{f}{2} RT$$

Wie Teilchen zu ihrer durchschnittlichen Energie  $\langle E_{kin} \rangle$  gelangen ist unerheblich.  $\langle E_{kin} \rangle$  ist nur Funktion von  $T$ , einer eindeutig definierten Zustandsvariablen.

→ 1. Hauptsatz der Thermodynamik (Energiesatz):

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Im Unterschied zu  $Q$  und  $W$  ist Innere Energie  $U$  Zustandsfunktion.

"Im abgeschlossenen System ist Innere Energie konstant."

$$dU = \delta Q|_V = mc_V dT = nC_{V,mol} dT \text{ und mit}$$

$$\frac{dU}{dT} = n \frac{f}{2} R \qquad C_{V,mol} = \frac{f}{2} R$$

→ Wird bei Zustandsänderung  $p$  konstant gehalten, so ist die Enthalpie

$$H = U + pV$$

besser zur Beschreibung von Zustandsänderungen geeignet. Da  $U$  Zustandsfunktion ist ( $dU$  ist vollständiges Differential), ist auch  $H$  Zustandsfunktion.

$$\begin{aligned} dH &= dU + pdV = dU - \delta W = \delta Q|_p \\ &= mc_p dT = nC_{p,mol} dT \end{aligned}$$

mit  $c_p = \frac{1}{m} \frac{dH}{dT}|_p$ ,  $C_{p,mol} = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}|_p$ : spezifische/molare isobare WK

Schließlich folgt

$$C_{p,mol} - C_{V,mol} = \frac{p dV}{n dT} = R \text{ und damit: } C_{p,mol} = \left( \frac{f}{2} + 1 \right) R$$

→  $C_{V,mol}$  und  $C_{p,mol}$ , sowie der Adiabatenexponent  $\gamma$

$$\gamma = \frac{C_{p,mol}}{C_{V,mol}}$$

sind universell (*nicht* stoffabhängig) → durch Messung von  $C$  oder  $\gamma$  können molekulare Eigenschaften bestimmt werden, z. B.

Molekülform: f. Atomgas:  $f=3$ , für Gas hantelförmiger Moleküle:  $f=5$ , für Gas nichtlinearer mehratomiger Moleküle:  $f=6$ .

→ In Wärmeenergie-Maschinen (z.B. Verbrennungsmotoren) laufen thermodynamische *Kreisprozesse* ab: System wird über Serie von Zustandsänderungen immer durch die gleichen Zustände getrieben. Dabei kann Wärme in mechanische Arbeit (oder umgekehrt) gewandelt werden. Aber (1. HS):

"Es gibt keinen periodischen Prozeß, bei dem in einem abgeschlossenen System netto Energie erzeugt wird (kein *perpetuum mobile* erster Art)."

Für Ideale Gase gilt dabei:

isotherme Expansion/Kompression:  $dU = 0 \leftrightarrow \delta Q = -\delta W$

$$W_{1 \rightarrow 2} = -nRT \ln \frac{V_1}{V_2}$$

isobare Expansion/Kompression:  $\delta W = -pdV$

$$Q_{1 \rightarrow 2} = nC_{p,mol}(T_2 - T_1) \quad W_{1 \rightarrow 2} = -nR(T_2 - T_1)$$

$$\Delta U = Q_{1 \rightarrow 2} + W_{1 \rightarrow 2} = nC_{V,mol}(T_2 - T_1)$$

isochore Erwärmung/Abkühlung:  $dU = \delta Q$

$$\Delta U = Q_{1 \rightarrow 2} = nC_{V,mol}(T_2 - T_1)$$

adiabatische Expansion/Kompr.:  $dU = \delta W = -pdV$

Zustandsgleichung:  $pV^\gamma = \text{const.}$

$$\rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{C_{V,mol}/R}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{C_{p,mol}/R}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{C_{p,mol}/C_{V,mol}}$$

- Bei realem Gas ist auch bei adiabatischer Expansion  $\Delta U < 0$ , weil Arbeit gegen die Anziehung der Teilchen untereinander geleistet wird →  $T$  sinkt (*Joule-Thomson-Effekt*). Für Van-der Waals-Gas:

$$\mu_{JT} = \frac{dT}{dp} = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{\left(\frac{f}{2} - 1\right)R} < 0 \text{ für } T > T_i = \frac{2a}{Rb},$$

aber  $\mu_{JT} > 0$  für  $T < T_i$

- Inversionstemperatur  $T_i$ : obere Grenze des  $T$ -Bereichs, wo Abkühlung bei Expansion. Anwendung: Gas-Verflüssigung (*Linde*).  
 → Was unterscheidet reversible und irreversible Prozesse? Während bei Umkehrung eines reversibel geführten Prozesses eingesetzte Arbeit zurückgewonnen werden kann, geht sie bei irreversiblen Prozeß verloren (Bsp.: irreversible Expansion). Verlorene Energie erhöht *Entropie*  $S$  des Systems.

$$dS = \frac{\delta Q^{rev}}{T} = \frac{dU + pdV}{T}$$

Da  $U$  Zustandsfunktion, ist dies auch  $S$ .  $[S] = 1 \text{ J/K}$ .

Zustandsänderung für Ideales Gas:

$$dS = nR \left( \frac{3}{2} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right), \Delta S = nR \left( \frac{3}{2} \ln \frac{T_1}{T_0} + \ln \frac{V_1}{V_0} \right)$$

- Für Theorie d. Thermodynamik besonders wichtig: *Carnot-Kreisprozeß*. Isotherme Expansion ( $T_1$ ), adiabatische Expansion, isoth. Kompression ( $T_2$ ), adiab. Kompression. Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{-\sum_i W_i^{rev}}{Q^{rev}} \underset{\text{Carnot}}{=} \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = \frac{\Delta T}{T_1} \quad \text{hängt nur von } T\text{'s}$$

ab und ist maximal für zwei gegebene Temperaturen  $T_1$  und  $T_2$ .

- 2. Hauptsatz d. Thermodynamik: “Mechanische Energie kann nicht durch *vollständige* Umwandlung aus Wärme gewonnen werden.”  
(Kein *perpetuum mobile* 2. Art) ↔

$$dS \geq 0!$$

Bei Umkehr der Laufrichtung arbeitet (Carnot-)Kreisprozeß als Wärmepumpe. Bei geringer Temperatur des kalten Wärmebades ( $T \sim 0 \text{ K}$ ) wird dieser Prozeß prinzipiell ineffizient: Unendlich viel Energie muß aufgewendet werden, um Körper nahe Nullpunkt Wärme zu entziehen. Folgerung:

$$S(T \rightarrow 0\text{K}) = 0 \quad (\text{für } \underline{\text{einheitliche}} \text{ Stoffe!})$$

Aber:  $T = 0 \text{ K}$  kann nicht erreicht werden!

- Statistische Interpretation der Entropie:

$$S = k_B \ln W$$

Entropie eines *Makrozustandes* ist proportional zur Wahrscheinlichkeit  $W$ , die sich aus der Summe der *Mikrozustände* ergibt, durch die er realisiert werden kann. Diese Interpretation ist vollkommen äquivalent zur bisher verwendeten Entropie-Definition.

Beispiele: (a) freie Expansion eines idealen Gases ( $v \rightarrow V$ ):

$$\Delta S = k_B N \ln \frac{V}{v} = nR \ln \frac{V}{v} \quad (> 0!)$$

(b) Mischung zweier idealer Gase:

$$\Delta S_m = n_1 R \ln \frac{(n_1 + n_2)}{n_1} + n_2 R \ln \frac{(n_1 + n_2)}{n_2} \quad (> 0!)$$

(c) Temperatenausgleich zwischen Körpern (vorher  $T_2 > T_1$ ):

$$\Delta S_m = \frac{f}{2} R \left( \ln \frac{T_m}{T_1} + \ln \frac{T_m}{T_2} \right) (> 0, \text{ weil } \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} > 0 \text{ für } T_2 > T_1!)$$

Alle Beispiele zeigen: Vorgang läuft *spontan* ab, wenn  $\Delta S > 0$ .

→ Gleichgewichtsbedingungen der Thermodynamik (aus 1./2. HS):  

$$dU \leq TdS - pdV = 0$$

→ Natürliche Variable von  $U = U(S, V)$  sind Entropie  $S$  und Volumen  $V$ . System verändert sich unter adiabatisch-isochoren Bedingungen spontan in Richtung kleinerer Werte von  $U$  solange bis  $U = U_{min}$ . Analog:

$dH \leq TdS + Vdp = 0$  Enthalpie: adiabatisch-isobare Prozesse und mit  $F = F(T, V) = U - TS$  (Freie Helmholtz-Energie):

$dF \leq -SdT - pdV = 0$  (isotherm-isochor)

bzw. mit  $G = G(T, p) = U + pV - TS$  (Freie Enthalpie):

$dG \leq -SdT + Vdp = 0$  (isotherm-isobar)

Beispiel: Gleichgewichtsverteilung von  $n$  Teilchen auf 2 Kompartimente ( $n^*$ ,  $n - n^*$ ) mit Energiedifferenz  $\Delta E$  als Funktion von  $T$

$$n^* = ne^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \quad \text{Boltzmann-Verteilung!}$$

→ Temperatur- und Druckabhängigkeit des Gibbs-Potentials  $G$ :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_p = -S \quad (\text{stets} < 0, \text{ weil } S > 0) \quad \left. \frac{\partial G}{\partial p} \right|_T = V \quad (\text{stets} > 0)$$

Abh. groß für Gase ( $S$  und  $V$  groß), klein für kondensierte Phasen

→ molare Gibbs-Funktion für einheitliches System (nur 1 Teilchensorte): *Chemisches Potential*  $\mu = G_{molar}$ . Ideales Gas:

$$\mu(p) = \mu_0 + RT \ln \frac{p}{p_0}$$

ist zur Beschreibung *offener Systeme* geeignet. Verallgemeinerung:

$$\mu_i = \left. \frac{\partial G}{\partial n_i} \right|_{T, p, n_{j \neq i}}$$

- Bei einer gegebenen Temperatur  $T$  ist diejenige Phase eines Stoffsystems stabil, die bei  $T$  den geringsten Wert von  $\mu$  hat. Ein Phasenübergang findet dort stat, wo  $\mu = \mu(T,p)$  für beide Phasen den gleichen Wert besitzt:  $\mu_{\text{Phase1}}(T,p) = \mu_{\text{Phase2}}(T,p)$ .
- Kondensierte Phasen stehen mit ihrem Dampf im Gleichgewicht, weil stets einige Moleküle in Gasphase austreten und von der Gasphase in kondensierte Phase zurückkehren. Ist die Austrittsarbeit  $\Delta W$ , so verläuft die Dampfdruckkurve wie

$$p_D = p_0 e^{-\Delta W / k_B T}$$

- aus Steigung in *Arrhenius*-Auftragung,  $\ln p(T)$  vs.  $(1/T)$ , folgt  $\Delta W$ . Aus Betrachtung der molaren Volumina:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta H_m}{T} \frac{1}{(V_m^g - V_m^{fl})} = \frac{\Delta S_m}{\Delta V_m}$$

folgt Verlauf der Koexistenzkurve im  $p, T$ -Diagramm (gilt auch für andere Phasen-Koexistenzen).

- Phasenkoexistenzkurven verlaufen exponentiell gekrümmt mit  $\frac{dp}{dT} \propto \frac{1}{\Delta V_m}$ , wobei Steigung der Fk/Gas und Flkt/Gas-Koexistenz stets flacher ist als Fk/Flkt-Koexistenz, weil  $\Delta V_m$  groß für Gas.  $\text{H}_2\text{O}$ : Fk/Flkt-Koexistenz anomal gekrümmt, weil  $V_m(\text{Flkt}) < V_m(\text{Fk})$
- Anomalie des Wassers.

- Im Allgemeinen gibt es viel mehr unterschiedliche Phasen eines ein-komponentigen Stoffsystems als nur gas – flüssig – fest: Insbesondere Festkörper-Phasen weisen (bei hohen Drucken) eine große Vielfalt auf, die sich durch ihre molekulare Struktur unterscheiden (→ Festkörper-Physik). Daneben: Unterschiedliche Ordnungsphänomene bei komplexen organischen Molekülen: Flüssigkristall-Phasen (→ Molekül-Physik).

→ *Gibbs'sche Phasenregel* legt Varianz  $F$  (Freiheitsgrad  $\equiv$  Anzahl unabhängig voneinander veränderlicher Variablen) eines Systems fest:

$$F = C + 2 - P$$

( $C$ : Anzahl der Komponenten,  $P$ : Anzahl koexistierender Phasen).

→ Zusätzlicher Freiheitsgrad bei Mehrkomponentensystem: *Molenbruch*  $x$ . Dampfdruck verschiedener Komponenten ist additiv, aber nur für Ideale Lösung linear in  $x$ . → Abweichung für *reale* Lösungen, weil WW zwischen Molekülar A & B  $\neq$  WW zwischen A & A (A: Lösungsmittel). Für  $x_B \ll 1$  gilt *Raoult'sches Gesetz*:

$$\frac{p - p_A^0}{p_A^0} = -\frac{n_B}{n_A + n_B} = -x_B \quad (\text{proportional zu Molarität})$$

→ Möglichkeit z. Molekulargewichtsbestimmung für gelösten Stoff! Dampfdruckerniedrigung bewirkt Siede- & Schmelzpunkterhöhung:

$$\Delta T_s = (p - p_0) T_0 \frac{\Delta V_m}{\Delta H_m} \approx x_B \frac{RT_0^2}{\Delta H_m}$$

( $\Delta H_m$ : Schmelz-/Siedeenthalpie,  $\Delta V_m$ : Differenz molarer Volumina).

Für Schmelzen von  $H_2O$ :  $\Delta V_m < 0$  → Schmelzpunkt-*Erniedrigung*

→ Thermodynamik chemischer Reaktionen:

Für Reaktion  $\sum \nu_i A_i = 0$  mit Freier Enthalpie der Reaktionspartner

$A_i$ :  $G_{tot} = \sum_i n_i \dot{G}_{m,i} - TS_{misch}$  ( $\nu_i$ : Reaktionsstöchiometrie,  $n_i$ : Konzentration in Mol und  $G_{m,i} = H_{m,i} - TS_{m,i}$ : molare (Freie) Enthalpie und Entropie der Reaktionspartner) ergibt sich aus Minimierung von  $G_{tot}$

bzgl. der Reaktionskoordinate  $\xi$  (= Maß für Fortgang der Reaktion) das *Massenwirkungsgesetz*:

$$\prod_i n_i^{-\nu_i} = \left( \sum_i n_i \right)^{-\sum \nu_i} \exp \left( \frac{\sum_i \nu_i G_{m,i}}{RT} \right) \equiv K \quad (K: \text{Gleichgew.-Konst.})$$

Aus Arrhenius-Plot folgt Reaktions-Enthalpie  $\Delta_r H = \sum_i \nu_i H_{m,i}$ :

$$\frac{\partial \ln K}{\partial T^{-1}} = -\frac{\Delta_r H}{R} \quad (\text{van't Hoff-Gleichung})$$

- Wird Lösung (Molenbruch  $x_B$ ) von Lösungsmittel (LM) durch *semi-permeable* Membran getrennt, die nur für LM durchlässig ist, so entsteht auf Lösungsseite zusätzlicher Druck: *osmotischer* Druck.

$$\Pi V = n_B RT \quad (\text{van't Hoff-Gesetz})$$

- Möglichkeit zur Bestimmung des Molekulargewichts!

- Nichtgleichgewichts-Thermodynamik → Transportprozesse für Materie (*Diffusion*), Wärme (*Wärmeleitung*) und Impuls (*Viskosität*)

Treibende Kraft für Teilchenstrom unter Konzentrationsgradient:

$$\vec{F} = - \left. \frac{\partial \mu}{\partial \vec{x}} \right|_{p,T} = - \frac{RT}{c} \left. \frac{\partial c}{\partial \vec{x}} \right|_{p,T} \quad (c: \text{Konzentration})$$

$$\vec{j} = -D \nabla c \quad (\text{Teilchenstrom: 1. Fick'sches Gesetz})$$

$D$ : Diffusionskoeffizient,  $[D] = 1 \text{ m}^2/\text{s}$

$$\vec{v}_0 = \frac{D}{RT} \vec{F} \quad (\text{Driftgeschwindigkeit: Einstein-Beziehung})$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (\text{Diffusionsgleichung: 2. Fick'sches Gesetz})$$

- Lösung der D.-Gleichung in 1 D für  $\delta$ -Verteilung bei  $x = 0, t = 0$ :

$$c = \frac{N}{V}(x,t) = \frac{N_0}{A \sqrt{\pi D t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (N_0/A: \text{Flächendichte bei } t = 0)$$

Selbstdiffusion (Teilchen unter Seinesgleichen) *ohne* Konz.gradient:

$$\overline{x^2} = 3Dt \quad (\text{mittleres Verschiebungsquadrat in 3 D})$$

- Analog: Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ :

$$\vec{j}_{therm} = -\lambda \nabla T \quad [\lambda] = 1 \text{ W/K}\cdot\text{m}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T \quad (c: \text{Wärmekapazität; } \frac{\lambda}{\rho c}: \text{Wärmeleitwert})$$

- Zusammenhang zwischen Diffusion und Viskosität  $\eta$ :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta r} \quad (\eta: \text{Stokes'sche Viskosität, } r: \text{Teilchenradius})$$

(*Stokes-Einstein-Beziehung*)

## Elektrostatik

→ Kraft zwischen zwei Ladungen (Coulombgesetz):

$$\vec{F}_{el} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}_r \quad \text{mit } \epsilon_0 = 8.859 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Jm}$$

→ *Influenz*: Ladung induziert in el. Leiter wegen Verschiebung von Ladungen stets anziehende Kraft.

→ Elektrisches Feld ist Raumeigenschaft um Ladung, die mit Testladung  $q$  gemessen werden kann:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_{el}(\vec{r})}{q}$$

→ Elektrischer Fluß (in Analogie zu Mechanik fluider Medien):

$$\Phi = \int \vec{E}(\vec{r}) d\vec{A}$$

Fluß durch geschlossene Oberfläche hängt nur von Größe der eingeschlossenen Ladungen ab (Gauß'scher Satz):

$$\Phi = \oint \vec{E}(\vec{r}) d\vec{A} = \int \text{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(r) dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$\rho$ : Ladungsdichte. Für Punktladung folgt wegen Kugelsymmetrie:

$$E = \frac{\Phi}{A} = \frac{\Phi}{4\pi r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

und damit der numerische Vorfaktor des Coulombgesetzes.

→ Bei Verschiebung von Ladung im Feld  $\vec{E}$  wird Arbeit verrichtet:

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r} = -q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r}) d\vec{r} = -q \cdot U_{1,2}$$

wobei  $U$  die Spannung ist. Mit  $\vec{E} = -\text{grad } U$  folgt

$$\Delta U = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

→ Anwendung des Gauß'schen Satzes zur Berechnung von Feldverteilungen: Symmetrie Ladungsverteilung → Symmetrie von  $E$ .

(a) bel. kugelsymmetr. Ladungsverteilung: im Fernfeld ununterscheidbar von Punktladung gleicher Ladungsmenge:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(b) Inneres leitender (Hohl-)körper – geladen oder ungeladen – ist feldfrei: → Faraday-Becher, -Käfig

(c) geladener Draht der linearen Ladungsdichte  $\lambda$ :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad U = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r$$

(d)  $E$  stets  $\perp$  zu Leiteroberfläche: Verschiebbarkeit der Ladungen beseitigt  $E_{\parallel}$ . → Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche. Metallflächen *hoher Krümmung* haben hohe Feldstärke: "Absprühen" von Ladungen!

(e) "Bildladungen": Punktladung vor ebener Metallplatte verschiebt dort Ladungen durch Influenz. → Feldverteilung, identisch mit der von 2 ungleichnamigen Punktladungen im Raum mit Leiteroberfläche als Symmetrieebene → Berechnung von  $E$ ,  $F$ ,  $U$  bes. einfach, z. B.:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(2d)^2}$$

→ Kapazität

$$C = \frac{Q}{U} \quad [C] = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ F (Farad)}$$

ist nur von Gestalt der Ladungsverteilung abhängig. Z. B.

Plattenkondensator:  $C = \epsilon_0 A/d$ .

→ Parallelschaltung von Kondensatoren:  $C_{\text{ges}} = C_1 + C_2$ .

Serienschaltung:  $C_{\text{ges}}^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ .

→ Elementarladung aus *Millikan's* Schwebekondensator-Versuch:  
 $e = 1.609... \times 10^{-19} \text{ C}$ .

→ Feldverteilung um Dipol mit dem Dipolmoment  $\vec{p} = q \vec{l}$ :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad E_r = \frac{p \cos \vartheta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Kraft  $\vec{F}$  und Moment  $\vec{M}$  auf Dipol im Feld:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}, \quad \vec{F} = \vec{p} \cdot \text{grad} \vec{E} \quad (\text{Kraft nur im } \textit{inhomogenen} \text{ Feld,}$$

$$\text{grad} \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial E_x}{\partial x} & \frac{\partial E_x}{\partial y} & \frac{\partial E_x}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} & \frac{\partial E_y}{\partial y} & \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} & \frac{\partial E_z}{\partial y} & \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{pmatrix} : \text{Tensor})$$

Kapazität eines Plattenkondensators *mit Dielektrikum*:

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad \text{mit dimensionsloser Dielektrizitätskonstante } \epsilon.$$

An den Oberflächen des Dielektrikums entstehen Polarisationsladungen, die die Ladungen auf den Platten teilweise kompensieren

→  $\epsilon$  stets  $> 0$ . Dielektrische Polarisation:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \epsilon_0 \vec{E}_{\text{vak}} = (\epsilon - 1) \epsilon_0 \vec{E} = \chi_p \vec{E}$$

mit  $\chi_p$ : dielektrische Suszeptibilität

Unterscheidung zwischen "echten" und Polarisations-Ladungen wird überflüssig durch Einführung der *Dielektrischen Verschiebung*

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}: \quad \text{Aus } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} \text{ wird einfach } \text{div} \vec{D} = \rho!$$

→ Nur *echte* Ladungen sind Quellen von  $\vec{D}$ !

→ Molekulare Mechanismen, die zur Polarisation führen:

(a) Unpolare Atome/Moleküle: Verzerrung der (ohne Feld isotropen) Ladungsverteilung → Verschiebungspolarisation

(b) Polare Moleküle: Reorientierung → Orientierungspolarisation

→ Größe der *Verschiebungspolarisation* hängt von molekularer *Polarisierbarkeit*  $\alpha$  ab:

$$\vec{P}_v = n\alpha\vec{E} \quad \text{mit } n: \text{Anzahldichte der Moleküle im Dielektrikum}$$

→  $n\alpha = (\epsilon - 1)\epsilon_0$  mit  $(\epsilon - 1)\epsilon_0 \frac{M}{\rho} = N_A\alpha$  (Gase) und

$$\epsilon_0 \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \frac{M}{\rho} = \frac{1}{3} N_A\alpha \quad (\text{höhere Mat.-Dichten, Clausius-Mosotti})$$

( $M$ : Molgewicht,  $\rho$ : Dichte) Während Verschiebungspolarisation Feld *instantan* folgt und temperaturunabhängig ist, wirkt bei *Orientierungspolarisation* Wärmebewegung Reorientierung permanenter Dipole  $\vec{p}_p$  entgegen und folgt Feld *verzögert*.

→ Für Wechselfelder ist Größe der Polarisation *frequenzabhängig*: Bei hohen Frequenzen können Dipole Feldänderung nicht mehr folgen →  $\epsilon(\nu)$  sinkt mit steigendem  $\nu$  (dielektrische Relaxation).

→ Allgemeiner Ausdruck für dielektrische Suszeptibilität:

$$\chi_p = (\epsilon - 1)\epsilon_0 = n \left( \alpha + \frac{p_p^2}{3k_B T} \right)$$

→ Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} DE$$

→ Im *Stromkreis* ist der elektrische Widerstand  $R = U/I$  ( $[R] = 1 \text{ V/A} = 1 \Omega$ ). Ein (idealisierte) Widerstand, für den  $R$  unabhängig von  $U$  ist, heißt *Ohm'scher* Widerstand.  $\rho = R A/l$ : spezifischer Widerstand ( $[\rho] = 1 \Omega\text{m}$ );  $\sigma = 1/\rho$ : Leitfähigkeit.

→ Kirchhoff-Regeln: Für *Knoten* und *Maschen* (verschiedene Stromwege zwischen zwei bel. Knoten) gilt  $\sum I_i = 0$  bzw.  $U_1 = U_2 \dots = U_n$

→ Parallel-/Serienschaltung:  $(R_{ges}^{Para})^{-1} = \sum_i R_i^{-1}$ ;  $R_{ges}^{Serie} = \sum_i R_i$

→ Gleichstromtechnik: *Spannungsabfall* über Verbraucher  $R$  wird hochohmig und parallel zu  $R$  gemessen. *Strom* durch  $R$  wird niederohmig in Serie zu  $R$  gemessen. Um Verfälschungen der Resultate durch Meßgerät im Stromkreis zu vermeiden, mißt man stromlos in einer *Meßbrücke* (z.B. Wheatstone-Brücke).

Stromquellen besitzen Innenwiderstand  $R_i$ . → Klemmenspannung  $U_{kl} = U_0 - R_i I$  hängt von Belastung ab. Maximale Leistung wird Stromquelle entnommen bei  $R = R_i$  ("Leistungsanpassung").

→ Leistung im Stromkreis:

$$P = U \cdot I \underset{R: \text{ohm}\textcircled{c}h}{=} \frac{U^2}{R} = RI^2$$

Mit Stromdichte

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} = \rho_{el} \vec{v} \quad (\vec{v}: \text{Driftgeschwindigkeit d. Ladungsträger), d.h.}$$

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} \quad \text{folgt Kontinuitätsgleichung:}$$

$$\oint_A \vec{j}(\vec{r}) \cdot d\vec{A} = - \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad \text{bzw. } \text{div} \vec{j} = -\rho$$

→ Im (halb-)leitenden Festkörper führt die beim Durchlaufen einer Spannung an den Ladungsträgern verrichtete Arbeit im Wesentlichen *nicht* zu deren Beschleunigung, da sie ihre kinetische Energie durch Stöße mit Rumpfnionen wieder abgeben. → Ladungsträger im Feld besitzen *konstante* Driftgeschwindigkeit  $v_d$ .

$$\vec{j} = n \cdot e \cdot \vec{v}_d \quad \rightarrow \quad \vec{v}_d = \frac{\sigma}{ne} \vec{E} = \mu \vec{E} \text{ mit}$$

$\mu$ : Beweglichkeit der Ladungsträger;  $[\mu] = 1 \text{ m}^2/\text{Vs}$ . Die thermische Geschwindigkeit der Elektronen ist

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}} \sim 10^5 \text{ m/s (Elektronenmasse } m_e \sim 10^{-27} \text{ kg)}$$

Beträgt die *mittlere freie Weglänge* zwischen zwei Stößen  $l$  und die mittlere freie Flugzeit  $\tau = l/v_{th}$ , so wird

$$v_d = -\frac{eE}{m_e} \tau$$

Beispiel Kupfer:  $v_d \sim 4 \times 10^{-5} \text{ m/s}$  ( $\ll v_{th}$ !). → Geschwindigkeit der Informationsübertragung entlang elektrischer Leitungen beruht auf Ausbreitungsgeschwindigkeit des  $E$ -Feldes, *nicht* auf Ladungstransport!

Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{e^2 n \tau}{m_e} \text{ ist unabhängig von } E \text{ (} \rightarrow \text{ Ohm'sches Gesetz!)}$$

und verhält sich zu Wärmeleitfähigkeit  $\lambda = 1/2 n v_{th} l k_B$  wie

$$\frac{\lambda}{\sigma T} = 3 \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 \quad (\text{Wiedemann-Franz-Gesetz}).$$

→ Temperaturabhängigkeit der Leitfähigkeit in Festkörpern

$$\sigma(T) = n(T) \cdot e \cdot \mu(T)$$

Metalle: Ladungsträgerdichte  $n$  temperaturunabhängig, Ladungsträgerbeweglichkeit  $\mu$  bestimmt durch Streuung an *Phononen*.

$$\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial T} < 0, \quad \sigma(T) = \sigma_0 (1 - \alpha T).$$

Halbleiter:  $n$  ist stark temperaturabhängig (und dominiert  $T$ -Abhängigkeit von  $\sigma$ ). *Bandstruktur* der Elektronenzustände: gebundenes Elektron benötigt Energie  $\Delta W$  ("Bandlückenenergie") um von *Valenzband* in *Leitungsband* zu gelangen. Thermodynamik → Gleichgewichtszustand ist Boltzmann-verteilt:

$$\rightarrow \sigma(T) = n_0 e^{-\Delta W/k_B T} \cdot e \cdot \mu(T)$$

Bei Leitern: Leitungsband teilweise besetzt; HL und Isolatoren: LB unbesetzt; typisch:  $\Delta W \sim 1$  eV (HL),  $\Delta W > 3$  eV (Isolator).

→ Energieskala in atomaren Systemen:  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$ ;

Vergleich:  $k_B T \sim 0.025$  eV bei  $T = 300$  K.

Halbleiter können *intrinsische* Leitfähigkeit besitzen oder mit Fremdatomen *dotiert* sein. *Dotierungs*-HL: überschüssige Elektronen oder fehlende Elektronen ("Löcher") gelangen leicht in LB ( $\Delta W \ll \Delta W_0$ ) und stellen dort negative oder positive Ladungsträger dar.

Photoleiter: Energiereiche Strahlung → Ladungstrennung; freie Ladungsträger werden im extern angelegten Feld "abgesaugt".

Kontakt zwischen unterschiedlich dotierten HL führt zu Feld über Grenzfläche und damit zu *Verarmungsschicht* an Ladungsträgern.

Photodiode, Solarzelle: Wird in Verarmungsschicht durch Strahlung Ladungstrennung bewirkt, so saugt intrinsisches Feld Ladungsträger ab (keine externe Spannung für Betrieb nötig!).

→ direkte Umwandlung von Licht in elektrische Energie

HL-Diode: Externes Feld verbreitert oder verschmälert Verarmungsschicht je nach Polung → Gleichrichterwirkung.

In Transistoren liegen zwei entgegengesetzt orientierte Verarmungsschichten in unmittelbarer Nähe. Wird die erste (*Emitter/Basis*) durch Spannung überbrückt, so können Ladungsträger durch die zweite (*Basis/Kollektor*) hindurch diffundieren. → Steuerung großer Kollektorströme durch kleine Basisströme (Stromverstärkung).

Leuchtdiode: Umkehrung des Photoleiter-Prinzips. Rekombination von über Elektroden injizierten Ladungsträgern → Lichtemission.

→ Stromleitung durch Elektrolyte:

Salze zerfallen in wässriger Lösung in *Anionen* (negativ) und *Kationen* (positiv geladene) Teilchen, die von *Hydrathülle* umgeben sind und im elektrischen Feld zur Anode (positive) bzw. Kathode (negative Elektrode) wandern. Faraday'sche Gesetze: (1) an Elektroden abgeschiedene Masse ist proportional zur transportierten Ladung.

$$A = \frac{M}{Fz} \quad (A: \text{elektrochemisches Äquivalent, } M: \text{Molmasse,}$$

$z$ : Wertigkeit des Ions;  $F = 96\,500 \text{ C/mol}$ : Faraday-Konstante)

(2) Von gleicher Ladung transportierte Massen verhalten sich wie die chemischen Äquivalente.

$$m_1 / m_2 = A_1 / A_2$$

Leitfähigkeit:

$$\sigma = \frac{j}{E} = (z_+ \mu_+ n_+ + z_- \mu_- n_-) e \quad (n: \text{Volumen-Anzahldichte})$$

$\mu = (\mu_+ + \mu_-) \sim 10^{-7} \text{ m}^2/\text{Vs}$  ist typischerweise 4 Größenordnungen kleiner als für Elektronen im Metall.

Äquivalentleitfähigkeit  $\Lambda = \sigma/c$  nimmt mit steigender Konzentration ab. Ursache: Dissoziationsgleichgewicht bei schwachen Elektrolyten

$$\alpha = \frac{\kappa}{2c} (\sqrt{1 + 4c/\kappa} - 1) \quad (\text{Ostwald'sches Verdünnungsgesetz})$$