

## Experimentalphysik III/IV, Uni Leipzig, WS 1998/99, SS 1999

→ Elektrostatik und Magnetostatik werden aus ähnlichen Prinzipien entwickelt:

Kraft auf ruhende

$$\vec{F}_C = q \cdot \vec{E}$$

(Coulomb-Kraft)

auf bewegte Ladung

$$\vec{F}_L = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

(Lorentz-Kraft)

$$[\vec{B}] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

Kraft auf stromführenden Leiter:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Kraftdichte  $\vec{f}$  auf Leiter mit Stromdichte  $\vec{j}$ :

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$$

Moment auf Leiterschleife (Fläche  $\vec{A}$ ):

$$\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$$

mit  $\vec{m} = I \cdot \vec{A}$ : magnetisches Moment der Schleife.

Magnetfeld quer zu Strom in flächigem Leiterblech (Breite  $b$ , Dicke  $d$ , Ladungsträgerdichte  $\rho_e$ ) führt zu Querspannung ("Hall-Effekt"):

$$U_H = -b \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -\frac{1}{\rho_e \cdot e} \cdot \frac{I \cdot B}{d} \quad (\text{für Elektronen})$$

→ relativistische Feldtheorie:  $\vec{E}$ -Felder und  $\vec{B}$ -Felder können aufgrund Ihrer Kraftwirkung auf geladene Teilchen nicht eindeutig voneinander unterschieden werden, weil es keinen "absoluten" Bewegungszustand gibt. Konsequenz: Ein  $\vec{B}$ -Feld, das auf bewegte Teilchen wirkt, sieht im mitbewegten System wie  $\vec{E}$ -Feld aus!

$$\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}' = -\frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$

Anwendung: z. B.  $\vec{B}$ -Feld eines freien Elektronenstrahls:

$$\vec{B} = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\varphi \qquad \rightarrow \qquad \text{rot} \vec{B} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2}$$

(Wirbeldichte von  $\vec{B}$ )

Definiere Magnetischen Fluß:

$$\Phi_M = \iint \vec{B} d\vec{A}$$

→ Aus Eigenschaften von  $\vec{B}$  folgt:  
Fluß durch beliebige geschlossene Oberfläche

$$\Phi_M = \oiint \vec{B} d\vec{A} = \iiint \text{div} \vec{B} dV = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{div} \vec{B} = 0$$

Definiere Magnetische Feldstärke:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \qquad \text{mit} \qquad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 1.26 \dots 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

→  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$  (in Materie) und  
 $\text{div} \vec{H} = 0$  und  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = I \quad \text{hat zur Folge:} \quad \vec{H} = I/2\pi r \quad \text{für geraden Leiter}$$

→  $\vec{H}$ -Felder verschiedener Stromverteilungen  $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$  können aus einfachen geometrischen Überlegungen abgeleitet werden:

stromdurchflossenes Blech (unendliche Ausdehnung in  $x$ - $y$ ,  $j_y = 0$ ):  
 $H$  springt bei Durchgang durch Blech um

$$\Delta \vec{H} = \vec{j} \times \vec{d} \quad (\vec{d}: \text{Dicke des Bleches mit Richtung})$$

Abstandsabhängigkeit von  $\vec{H}$  vom Blech:

$$H_y(z) = \frac{j \cdot d}{2} \quad (\text{unabhängig von Abstand!})$$

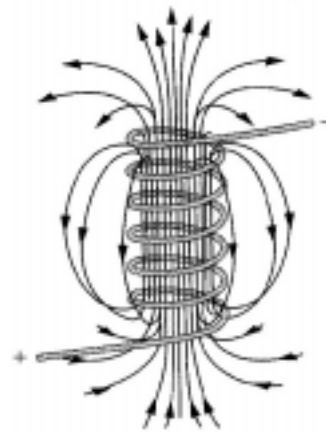
Blechpaar, quadratisch umfaßte Blechsäule (gegenläufige Ströme):

→  $\vec{H}$  verstärkt sich im Inneren und hebt sich im Außenraum auf.

→  $\vec{H}$ -Feld im Innenraum von unendlich langer Spule:

$$H_{\text{Spule}} = \frac{N \cdot I}{l} \cdot \vec{e}_l$$

→  $\vec{H}$ -Feld endlich langer Spule erinnert an elektrischen Dipol:



→  $\vec{H}$ -Feld von Rohr mit Längsstrom ist im Außenraum nicht von Feld des geraden Leiters zu unterscheiden ( $H = I/2\pi r$ ).

(Analogie:  $E$ -Feld von Hohlkugel/Punktladung)

Berechnung der Felder *beliebiger* Stromverteilungen im Raum:

$$d\vec{H} = \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\vec{j}(\vec{r})dV \times \vec{r}}{4\pi r^3} \quad (\text{Biot-Savart-Gesetz})$$

→  $\vec{H}$ -Feld auf der Symmetrieachse eines Ringstroms (magn. Dipol  $\vec{m}$ ), Fernfeld:

$$\vec{H}_{axial} = \frac{2\vec{m}}{4\pi r^3} \text{ (wie elektr. Dipol)}$$

Mittelpunkt des Ringstroms:

$$H_{Zentrum} = \frac{I}{2R}$$

Kräfte zwischen parallelen Leitern:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

→  $\vec{H}$ -Feld verläuft wie Äquipotentialflächen von  $\vec{E}$  geladener Drähte.

→ Permeabilität:

$$\mu_r = \frac{|\vec{B}|}{\mu_0 |\vec{H}|}$$

Grobeinteilung:

$\mu_r \gg 1$ : Ferromagnetika

$\mu_r \gtrsim 1$ : Paramagnetika

$\mu_r \lesssim 1$ : Diamagnetika

Magnetisierung:

$$\vec{M} = (\mu_r - 1)\vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

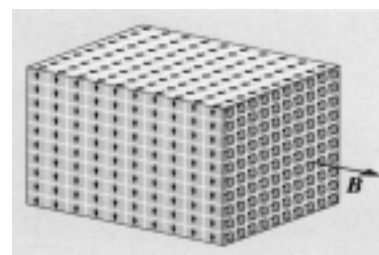
magnetische Polarisation:

$$\vec{J} = \chi_m \vec{B} \quad (\chi_m: \text{Suszeptibilität})$$

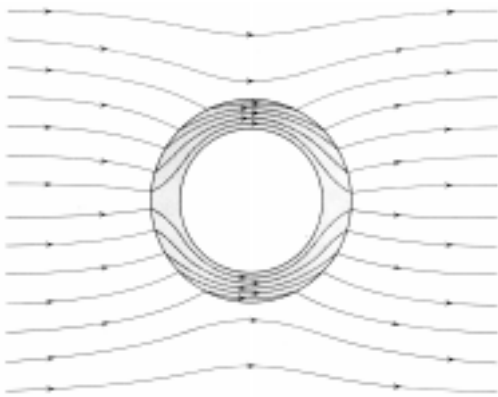
→ Ursache:

gebundene Ströme induzieren zusätzlichen Magnetfluß. →

→ nur Magnetflußdichte  $\vec{B}$  wird erhöht



- Brechung von Feldlinien bei Übergang über Grenzflächen zwischen Materialien mit unterschiedlichem  $\epsilon_r$  bzw.  $\mu_r$ :  
 Alle Feldgrößen ( $D$ ,  $E$ ,  $B$ ,  $H$ ) werden auf der Seite der größeren Suszeptibilität vom Lot weg gebrochen (für  $\sigma = 0$ ,  $j = 0$ ).  $E$  wird bei Übergang *reduziert*,  $B$  wird *verstärkt*.
- Besonderheit in Magnetostatik (gegenüber Elektrostatik):  
 $\mu_r$  kann (für Ferromagnetika) *sehr* groß werden ( $10^3 \dots 10^4!$ ).



→ Feld wird in Material gebündelt!

Anwendung: Elektro-Magnet

Feld im Luftspalt:

$$H_L = \frac{N \cdot I}{\frac{l}{\mu_r} + d}$$

$$= \frac{\mu_r \cdot N \cdot I}{l} \quad \left( d \ll \frac{l}{\mu_r} \right) \quad \text{bzw.} \quad \frac{N \cdot I}{d} \quad \left( d \gg \frac{l}{\mu_r} \right)$$

Energie im Magnetfeld:

$$w_B = \frac{W_B}{V} = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

→ Haltekraft des Elektromagneten ( $A$ : Fläche des Luftspalts):

$$F = \frac{1}{2} A \frac{B^2}{\mu_0}$$

- Die Veränderung des Magnetischen Flusses durch eine Fläche führt zur Induktion eines elektrischen Feldes an deren Randlinie, und damit zu einer Induktionsspannung:

$$U_{ind} = \oint_{\mathfrak{R}} \vec{E} d\vec{r} = - \frac{d\Phi_M}{dt}$$

Die Ursache hierfür ist formal die Lorentz-Kraft auf eine Ladung im (materiellen) Leiter. Allerdings wird das  $E$ -Feld auch ohne Leiter induziert (Analogie: Für das Vorhandensein eines  $E$ -Felds im Raum ist es unerheblich, ob das Feld tatsächlich mit einer realen Testladung  $q$  ausgemessen wird oder nicht).

Die differentielle Form des *Faraday'schen Induktionsgesetzes* lautet:

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{d\vec{B}}{dt}$$

- $\vec{E}$ -Felder können eine Wirbeldichte besitzen, d.h., sie müssen nicht unbedingt von Ladungen ausgehen/an Ladungen enden!
- Lenz'sche Regel: Die Richtung des von  $\dot{\Phi}_M$  induzierten Stromes ist derart, daß sein  $H$ -Feld der Induktionsursache (z.B. anwachsendes  $B$ -Feld) entgegen gerichtet ist (sonst wäre Energiesatz verletzt!).

- Inhomogene  $\vec{B}$ -Felder oder  $\vec{B}$ -Felder, deren Ausdehnung klein gegen ausgedehnten Leiter ist, induzieren im bewegten Leiter (Geschwindigkeit  $\vec{v}$ ) Wirbelströme. Resultierende Kräfte:

$$\vec{F}_{res} \sim - \left( A \frac{d\vec{B}}{dz} \right)^2 \cdot \vec{v}$$

- viele technische Anwendungen/Implikationen!

Stromkreise induzieren bei  $\dot{I} \neq 0$  *in sich selbst* Spannung:  
Selbstinduktion!

$$\Phi_M = L \cdot I; \quad U_{ind} = -L \cdot \frac{dI}{dt}$$

$$[\Phi_M] = 1 \text{ Vs} \quad \rightarrow \quad [L] = 1 \text{ } \Omega\text{s} = 1 \text{ H (Henry)}$$

- Selbstinduktion bewirkt, daß Stromkreise beim Ein-/Ausschalten (und auch allgemeiner) *nicht* dem Zeitverlauf der extern angelegten Spannung folgen:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right); \quad I(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (\tau = L/R)$$

- Magnetfeld speichert Energie, die nach Abschalten in elektrische Energie umgewandelt wird → Betrag der Energie im Magnetfeld
- Benachbarte Spulen beeinflussen sich gegenseitig: Gegeninduktivität

$$U_{ind}(1) = - \frac{d\Phi_M}{dt} = -L_{12} \frac{dI(2)}{dt} \quad (L_{12} = L_{21})$$

Kopplungskoeffizient:  $k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} \cdot L_{22}}}$

### Struktur der Materie:

Elektronen kreisen in Atomhülle um Kern → Dies ist mit Kreisströmen und  $H$ -Feld verbunden. Zusätzlich: Eigen-Drehimpuls der  $e^-$  (Spin)  
 Aber (QM): 2 Elektronen im gleichen Zustand *müssen* entgegengesetzte Bahnmomente und Spins besitzen (“Pauli-Prinzip”) und heben sich auf.

→ Atome oder Moleküle mit 2 Elektronen besitzen Netto-Moment

$$\vec{m}_{total} = \vec{0} \quad \text{und sind daher diamagnetisch.}$$

Atomare Ursache des Diamagnetismus: Externes  $\vec{B}$ -Feld hebt Entartung der Bahnmomente auf. Es entsteht ein (kleines) Netto-Moment  $\vec{m}$ , das um die  $B$ -Richtung präzidiert (“Larmor-Präzession”). Der hervorgerufene Ringstrom im Atom ist der Ursache ( $B$ -Feld) entgegengerichtet.

→  $\vec{B}$  wird abgeschwächt,  $\mu_r < 1$ .

Diamagnetismus ist in seiner Stärke temperaturunabhängig.

Ist nur ein  $e^-$  in der Atomhülle unkompensiert, so bewirkt es Paramagnetismus. Der Diamagnetismus aller anderen, einander kompensierenden  $e^-$  wird hiervon überlagert.

Atomare Ursache des Paramagnetismus: Magnetisches Moment des unkompensierten  $e^-$  wird im externen  $B$ -Feld (präferentiell) ausgerichtet und verstärkt das erzeugende Feld:  $\mu_r > 1$ . Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität:

$$\chi_m = \mu_0 (\mu_r - 1) = \frac{C}{T}; \quad \chi_{mol} = \mu_0 \frac{m^2}{3k_B T}$$

gyromagnetisches Verhältnis:  $\mu = \frac{m_{total}}{L} = g \cdot \frac{e}{2m}$

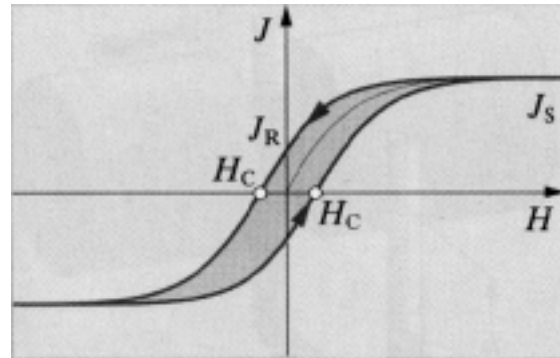
“Landéfaktor”  $g$  ist empirische Korrektur → Spektroskopie (ESR)

- Ferromagnetismus tritt nur bei Material mit Kristallgitter auf  
 Magnetisierung  $\vec{J} = \vec{J}(\vec{H})$  ist ausgeprägt nichtlinear → Hysterese

$J_S$ : Sättigungs-Magnetisierung

$J_R$ : Remanenz-Magnetisierung

$H_C$ : Coerzitiv-Feld



Integral über Hysterese-Kurve

$\oint \vec{J}(\vec{H}) d\vec{H}$  ist Maß für Verlust-Energie bei Ummagnetisierung

- Anwendungen für magnetisch "harte" und "weiche" Materialien  
 → Temperaturabhängigkeit: Ferromagnetismus geht bei Curie-Temperatur  $T_c$  in Paramagnetismus über. Für diesen gilt das Curie-Weiss-Gesetz:

$$\chi_m(T) = \frac{C}{T - T_c}$$

- Atomare Ursache: Kopplung zwischen magnetischen Momenten auf Gitterplätzen bewirkt spontane Magnetisierung der *Weiss-schen Bezirke* im Material. Bezirke können, durch *Bloch-Wände* getrennt, unterschiedlich orientiert und Material daher nach außen hin unmagnetisch sein. Externes Feld führt zur kooperativen Ausrichtung der Magnetisierung der Bezirke (*Barkhausen-Sprünge* von  $\vec{J}$ ).
- Einstein-De Haas-Versuch zeigt, daß Reorientierung der Spins Ursache der Magnetisierung ist. Details des magnetischen Verhaltens hängen von den Details der Gitterstruktur ab.

- Details des Kristallbaus bestimmen das Wesen des Magnetismus:  
Anti-Ferromagnetismus: Entgegengesetzt gerichtete Orientierung  
gleich großer Spins im Gitter.

Temperaturverhalten:

$$\chi_m = \frac{C}{T + \Theta} \quad (\text{für } T > T_N)$$

paramagn. Suszeptibilität ( $T_N$ : Néel-Temp.,  $\Theta$ : Debye-Temp.)

Ferri-Magnetismus: Entgegengesetzt orientierte Spins sind nicht  
gleich groß. Solch ein Kristallbau führt zu Materialien mit ähnlichen  
magnetischen Eigenschaften wie Ferromagnete, aber geringeren  
Verlusten (“Ferrite”).

- Vergleichbar hohe Suszeptibilitäten wie für Ferromagnete finden  
sich auch bei manchen dielektrischen Festkörpern ( $\epsilon_r \sim 10^3$ )  
→ “Ferroelektrika”. Anwendung: z. B. Piezo-Effekt

Erdmagnetismus:

Erde ist magnetischer Dipol (mit magn. S in Nähe von geogr. N)

Theorie für Ursache: Dynamo-Effekt.

Erdfeld zeigt zeitliche Schwankungen auf verschiedenen Zeitskalen  
und ist auch geographisch nicht stabil (Wanderung der Pole und  
wiederholte Umpolungen auf einer Zeitskala von Mio. Jahren)

→ Kontinentaldrift-Theorie bestätigt

Sonnenwind (kleine geladene Partikel aus Atmosphäre der Sonne)  
führt zur Verformung des Dipolfeldes → Nordlicht

→ Generatoren und Elektro-Motoren sind Induktions-Maschinen

Generator-Prinzip: Flußänderung in rotierendem Anker erzeugt Induktionsspannung, die externem Verbraucher zugeführt wird.

Klemmenspannung: 
$$U_{kl} = U_0 - R_i I$$

Für die Rotation des Ankers muß mechanische Arbeit erbracht werden → Energieerhaltung.

Beispiele: T-Anker-, Drehstrom-, Gleichspannungs-Generatoren  
Erregung des Generator-Magneten kann im Haupt- oder Nebenschluß geschehen → Unterschiede in Kennlinie  $U = U(I)$

Hochfrequente Wechselspannungen werden durch periodische Veränderungen des Flusses in magnetischem Kreis erzeugt.

→ Motoren entstehen bei Umkehrung des Generator-Prinzips.

Angelegte Spannung erzeugt Magnetpole, die sich in zeitlichem Muster gegenseitig abwechselnd anziehen und abstoßen.

→ Kreisbewegung

Alle Details, die für Generatoren diskutiert werden, sind auch hier relevant, z.B. Haupt-/Nebenschluß → Unterschiede in Kennlinie

$$\vec{M} = \vec{M}(\omega)$$

## Die Wechsel-Spannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

besitzt die Effektiv-Spannung  $U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$ . (Die Leistung von  $U(t)$  an  $R$  ist die gleiche wie die einer Gleichspannung mit  $U_{eff}$ ).

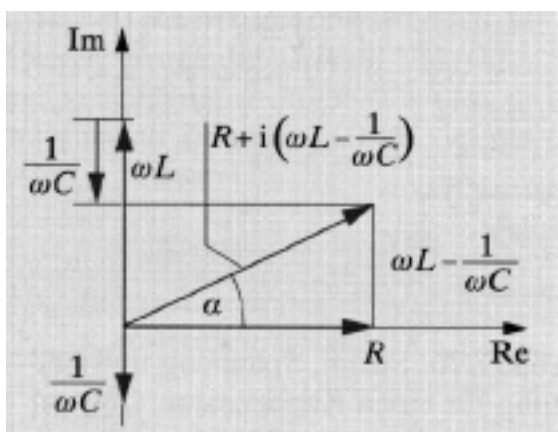
→ Wechselstrom-Widerstand:

Kapazität  $C$  und Induktivität  $L$  stellen *komplexe* frequenzabhängige Widerstände dar:

$$Z_C = \frac{-i}{\omega C}; \quad Z_L = i\omega L \quad (Z: \text{komplexer Widerstand}), \text{ bzw.}$$

$$Y_C = i\omega C; \quad Y_L = \frac{-i}{\omega L} \quad (Y: \text{komplexer Leitwert}).$$

Damit lassen sich Wechselstromkreise in der Komplexen Ebene, die von den Einheitsvektoren  $\vec{i}$  und  $\vec{1}$  aufgespannt wird, sehr einfach in Zeigerdiagrammen bestimmen:



z.B.  $Z$  einer Reihenschaltung aus  $R$ ,  $C$  und  $L$ . Reihenschaltungen werden am besten in  $Z$  analysiert ( $U = Z \cdot I$  ist additiv für Reihenschaltung!), Parallelschaltungen werden in  $Y$  analysiert ( $I = Y \cdot U$  additiv!).

Während von  $U$  an  $R$  echte Leistung ("Wirkleistung") erbracht wird, mitteln sich an  $C$  oder  $L$  durch Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom positive und negative Beiträge heraus. Netto wird dem Netz keine Leistung entnommen (→ "Blindleistung").

## Komplexe Zeiger-Schreibweise für Zweipole

$$\underline{I} = \underline{U} \cdot \underline{Y} \qquad \underline{I} \cdot \underline{Z} = \underline{U} \quad \text{mit}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_0 e^{i\omega t} = U_0 e^{i\alpha} \cdot e^{i\omega t} \qquad \underline{I} = \underline{I}_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i\beta} \cdot e^{i\omega t}$$

beschreibt das Verhältnis von Spannung und Strom eindeutig.

→ kontinuierliche Variation eines Parameters, z. B.  $R$ ,  $L$ ,  $C$  oder  $\omega$ , im Zeigerdiagramm führt zu Ortskurve. Umrechnung  $\underline{Y} \leftrightarrow \underline{Z}$  geschieht durch Spiegelung am Einheitskreis und Negation der Phase ( $\equiv$  Inversion). Diese Abbildung ist kreisaffin (Kreis  $\rightarrow$  Kreis; Gerade ist "Kreis" mit  $r = \infty$ ).

→ Berechnung beliebiger Netzwerke durch Zerlegung in Zweipole

Vierpole besitzen Ein- und Ausgang

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 \cdot f(R, C, L, \omega)$$

heißt Spannungsübertragungsfunktion.

→ Typische Vierpole: "RC-Glied", Hochpaß, Tiefpaß, etc.

Schwingkreise entstehen durch Kombination von  $L$  und  $C$ :

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad \text{ist maßgebliche Schwingungs-DGl.}$$

Analog zu mechanischer Schwingung ist die Lösung

$$Q(t) = Q_0 e^{\pm i\omega t} \cdot e^{-Rt/2L} \quad \text{mit } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

für freie Schwingung. Erzwungene Schwingung mit Erreger

$$\underline{U} = U e^{i\omega t} \qquad \text{führt zu Resonanzphänomenen.}$$

→ Anwendungen: Sender, Empfänger, Bandfilter, etc.

- Transformator: Fluß wird durch Wechselspannung  $\underline{U}_1$  in Primärspule erzeugt, durch Eisenkern auf Sekundärspule übertragen, und induziert dort  $\underline{U}_2$ :

$$\underline{U}_2 / \underline{U}_1 = - N_2 / N_1$$

Leerlauf: Primärstrom  $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{i\omega L_1}$  ist reiner Blindstrom

Bei Belastung  $\underline{I}_2 = \underline{U}_2 \cdot \underline{Y}$  bekommt Primärstrom

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{i\omega L_1} + \underline{I}_2 \cdot \frac{N_2}{N_1} \quad \text{eine Re-Komponente (Energiesatz).}$$

- Energie von geladenen Teilchen im E-Feld läßt sich auch als potentielle Energie  $E_{\text{pot}}$  verstehen:

$$E_{\text{pot}}(m) = mgh \quad \leftrightarrow \quad eEd = eU = E_{\text{pot}}(e)$$

Aus  $E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$  folgt Teilchengeschwindigkeit  $v = \sqrt{2eU/m}$

und Ablenkung nach Durchlauf eines  $\vec{E}$ -Felds der Länge  $l$  mit anschließender Laufstrecke  $D$  (Beschleunigungsspannung  $U_0$ ,

Ablenkspannung  $U = Ed$ ):

$$s = D \cdot \tan \alpha = \frac{Dl}{2d} \cdot \frac{U}{U_0} \quad \left( \propto \frac{1}{E_{\text{pot}}} \right)$$

- Im  $\vec{B}$ -Feld beschreibt geladenes Teilchen Kreisbahn mit

$$\omega = \frac{e}{m} \cdot B \quad (\text{Larmorfrequenz}) \quad \text{auf Radius } r = \frac{v}{\frac{e}{m} B}$$

Ablenkung:  $s = D \cdot \tan \beta = Dl \cdot \frac{eB}{mv_0} \quad \left( \propto \frac{1}{p} \right)$

In  $\vec{B}$ -Feld mit beliebiger Orientierung zu  $\vec{v}$  beschreibt Teilchenbahn eine Schraubenlinie mit Umlauffrequenz

$$\omega_L = \frac{e}{m} B, \text{ Radius } r = \frac{v_{\perp}}{\omega_L} \text{ und Ganghöhe } h = \frac{2\pi \cdot v_{\parallel}}{\omega_L}$$

Anwendung: Braun'sche Röhre, Oszillograph

→ Darstellung schnell veränderlicher periodischer Spannungssignale durch Verwendung von Kippspannung auf  $\vec{x}$ -Achse

→ Vergleich zweier periodischer Signale  $x(t) = x_0 e^{i\omega_1 t}$  und  $y(t) = y_0 e^{i(\omega_2 t - \varphi)}$  durch Darstellung in Ortskurve  $y = y(x)$  mit Parameter  $t$ :  
"Lissajous-Figuren"

→ Teilchen können nach ihrem  $\left(\frac{e}{m}\right)$  – unabhängig von ihrer Geschwindigkeit  $v_0$  – getrennt werden, wenn sie gleichzeitig ein  $\vec{E}$ - und ein  $\vec{B}$ -Feld durchlaufen.

Mit  $s_E \equiv y = \frac{e l D}{m v^2} E$  und  $s_B \equiv x = \frac{e l D}{m v} B$  folgt als Orts-

kurve, auf die alle Teilchen mit gleichem  $e/m$  abgelenkt werden:

$$y = \frac{m E}{e B^2 l D} \cdot x^2$$

Aber: bei großen Werten von  $v$  werden Abweichungen beobachtet wegen relativistischer Korrekturen zur Masse  $m$ :

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$m_0$ : Ruhemasse

→ Einstein's Relativitätstheorie

→ Maxwell: Änderung des  $\vec{D}$ -Feldes stellt einen Verschiebungsstrom  $\vec{j}_V$  dar. Daher ist  $\vec{D}$  genauso von Wirbelfeld  $\vec{H}$  umgeben wie der Leitungsstrom  $\vec{j}_L$ . Damit die Maxwell-Gleichungen, die alle elektromagnetischen Phänomene vollständig beschreiben:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \oint_A \vec{D} d\vec{A} = Q$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \oint_A \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathfrak{R}} \vec{E} d\vec{s} = -\int_A \frac{d\vec{B}}{dt} d\vec{A}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{d\vec{D}}{dt} + \vec{j} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\mathfrak{R}} \vec{H} d\vec{s} = \int_A \frac{d\vec{D}}{dt} d\vec{A} + I$$

→ Ein zeitlich veränderliches  $\vec{D}$ -Feld erzeugt ein zeitlich veränderliches  $\vec{H}$ -Feld (Wirbelfeld). Das wiederum erzeugt ein zeitlich veränderliches  $\vec{E}$ -Feld, etc.: Eine elektromagnetische Welle entsteht!

→ Die Maxwell-Gleichungen liefern die Grundlage zur Beschreibung elektromagnetischer Wellen. Aus der Veränderung der elektrischen bzw. magnetischen Flüsse durch ein Flächenelement folgt (nur eine Raumrichtung betrachtet):

$$\epsilon\epsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{d\vec{D}}{dt} = -\frac{d\vec{H}}{dx} = -\frac{1}{\mu\mu_0} \frac{d\vec{B}}{dt} \quad \text{sowie} \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = -\frac{d\vec{E}}{dx}$$

$$\rightarrow \frac{d^2 \vec{B}}{dt^2} = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0} \frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} \quad (\text{und analoge Gleichung für } \vec{E})$$

Dies ist wieder die d'Alembert'sche Wellengleichung mit der allgemeinen Lösung:

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}(x \pm c \cdot t); \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\epsilon_0 \mu\mu_0}} \sim 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\epsilon = \mu = 1)$$

und der speziellen Lösung (unter geeigneten Randbedingungen):

$$\vec{B}(x, t) = \vec{B}_0 \cos(\omega t - k_x x) \quad (\text{ebene Welle})$$

Die ebene elektromagnetische Welle besitzt folgende Eigenschaften:

- (1) sie ist *transversal* (wegen  $\text{div} \vec{B} = 0$ ),
  - (2)  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  stehen senkrecht aufeinander (und beide senkrecht auf  $\vec{x}$  wegen (1)),
  - (3)  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  sind in Phase und
  - (4)  $D_0 = 1/c H_0$ .
- (2) – (4) folgen aus  $\text{rot} \vec{H} = \dot{\vec{D}} (+ \vec{j})$ .

→ Ebene elektromagnetische Welle ist durch 3 Größen charakterisiert,

$$\omega, E_0 \text{ und } \vec{e}_p: \quad \vec{E} = \vec{e}_p \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{\omega}{c}x - \omega t\right)$$

$$\text{Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Materie: } c = \frac{c_0}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{c_0}{n}$$

mit  $n$ : Brechzahl (für transparente Medien ist allgemein  $\mu \sim 1$ ).

Die Energiedichte des Wellenfeldes ist

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}(ED + BH) = \epsilon\epsilon_0 E^2$$

und die Energiestromdichte ( $\vec{S}$ : "Poynting-Vektor"):

$$|\vec{S}| = |\vec{E} \times \vec{H}| = w \cdot c. \text{ Ebene Welle: } |\vec{S}| = E \cdot H$$

→ Metalloberflächen (unendlich hohe Leitfähigkeit) reflektieren Lichtwelle, weil auftreffendes  $\vec{E}$ -Feld durch Ladungsverschiebung kompensiert wird. → Nach Huygens entsteht Wellenfeld, dessen  $\vec{E}$ -Vektor am Spiegel zu dem des einfallenden Strahles um  $\pi$  phasenverschoben ist. Hinter Spiegel heben sich einfallendes und am Spiegel erzeugtes Wellenfeld durch destruktive Interferenz auf, vor Spiegel bildet sich stehendes Wellenfeld aus.

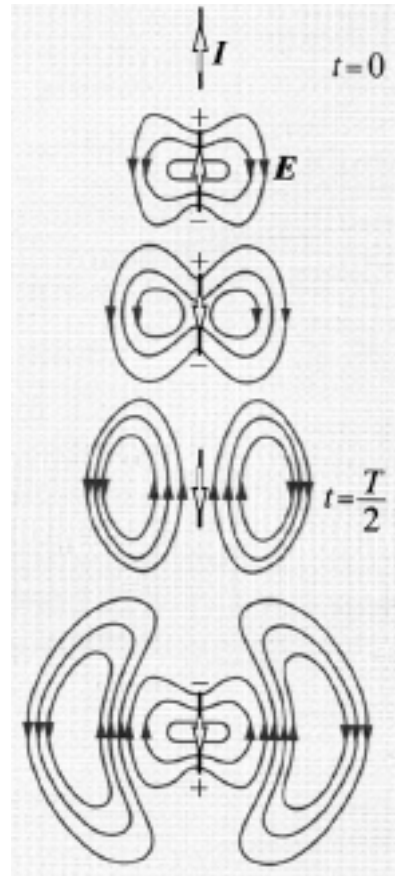
→ Stabförmiger Leiter (Länge  $l_0$ ) stellt Serienschwingkreis mit extrem kleinem  $R$ ,  $L$  und  $C$  dar. Wird Schwingungssignal geeigneter Frequenz (z. B. induktiv) eingekoppelt, so entsteht Antenne, die elektromagnetische Wellen abstrahlt.

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{2l_0}$$

→  $\vec{E}$ -Feldverteilung am Hertz'schen Dipol zu verschiedenen Zeiten (Nahfeld):

Im Fernfeld sind die Verhältnisse von  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Feld ähnlich wie in der ebenen Welle, aber

$$|\vec{S}| \propto \frac{1}{r^2}; \rightarrow E_0, H_0 \propto \frac{1}{r}$$



Strahlungscharakteristik (in Polarkoordinaten  $\varphi, \vartheta$  bei  $r = \lambda = \frac{\lambda}{2\pi}$ ):

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^3} \cdot \sin \vartheta, \quad |\vec{H}| = \frac{|\vec{p}|\omega}{8\pi\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2} \cdot \sin \vartheta$$

$$\rightarrow |\vec{S}| = \frac{p^2 \omega}{32\pi^2 \epsilon_0 \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^5} \cdot \sin^2 \vartheta$$

Oberflächenintegrierte Strahlungsleistung: 
$$P = \frac{p^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Allgemein: Beschleunigte Ladung emittiert elektromagnetische Strahlung!

$$P = \frac{(e \cdot \vec{a})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

→ Die Telegraphengleichung

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d^2 \vec{E}}{dt^2} + \mu_0 \sigma \frac{dE}{dt}$$

entsteht aus der einfachen Wellengleichung durch Einbeziehung der (endlichen) Leitfähigkeit  $\sigma$  des Mediums. Eine mögliche Lösung ist die ebene gedämpfte Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - kx)} e^{-\delta x} \quad (\delta: \text{Dämpfungskonstante des Mediums}).$$

Grenzfälle:

hohe Frequenzen ( $\omega \gg \mu_0 \sigma c_0^2$ ):

Intensität der Welle fällt entlang Ausbreitungsrichtung ab wie

$$I = I_0 e^{-\alpha x} \quad (\text{Absorptionskoeffizient } \alpha = 2\delta = c\mu_0\sigma)$$

Welle dringt weiter als  $\lambda$  in Medium ein. Da  $\lambda$  aber klein ist, z. B.  $\mu\text{m}$ , ist die Eindringtiefe auf absoluter Skala klein. Es gilt wie im Vakuum (näherungsweise)

$$c = \frac{\omega}{k} \sim c_0 \sqrt{\varepsilon}$$

niedrige Frequenzen ( $\omega \ll \mu_0 \sigma c_0^2$ ):  $\delta \sim k \sim \sqrt{\frac{\mu_0 \sigma}{2}} \sqrt{\omega}$ .

Wellen sind stark überdämpft und dringen nur einen Bruchteil von  $\lambda$  in Medium ein.  $c = \omega/k$  gilt hier nicht mehr!

Absorption als Resonanzphänomen: → Infrarot-Spektroskopie!

→ Folge: Radiowellen werden zwischen Erdboden und Ionosphäre wie in Hohlleiter geführt. Ausbreitungsreichweite  $\gg$  sichtbarer Horizont  
Ausnahme: UKW und kürzer (Wellen durchdringen Ionosphäre)

- Aussendung von Rundfunkprogrammen mittels Trägerwellen (z.B. UKW: 88 – 108 MHz), weil direkte Aussendung der Audiosignale (Wellenlänge  $\gg 1$  km) über Sendeantenne (Höhe z.B. 100 m) zu ineffizient wäre:

$$\eta \sim \frac{h^3}{\lambda^3}$$

- Erzeugung hochfrequenter Wellen ( $> \text{GHz}$ ,  $\lambda < 1 \text{ dm} \dots 1 \text{ mm}$ ) im Klystron: Ausnutzung von Laufzeiteffekten!
- Leitung von hochfrequenten Signalen auf konventionellen Leiterdrähten ist behindert durch Stromverdrängung aus dem Leiterzentrum nach außen (“Skin-Effekt”). Ursache: Wechselfeld  $\vec{E}$  induziert Wirbelfeld  $\vec{B}$ , das auch zeitlich veränderlich ist und daher ein Wirbelfeld  $\vec{E}_{\text{ind}}$  erzeugt, dessen Komponente in der Leitermitte das primäre  $\vec{E}$ -Feld aufhebt. Bei hohen Frequenzen sind daher andere Leiter-Typen, z.B. Hohlleiter, notwendig, um Strom effizient zu transportieren.

Feldamplitude, und damit auch Stromdichte  $\vec{j}$ , fällt von Rand her exponentiell ab:

$$E_{\text{res}}(r) \sim E_{\text{res}}(R)e^{-(R-r)/\delta} \text{ mit}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{\rho}{\pi\mu\mu_0\omega}}$$

( $\rho$ : spezifischer Widerstand)

- Das Plasma ist eine vierte Form von Aggregatzuständen (nach Festkörper, Flüssigkeit, Gas), der bei höchsten Temperaturen/Drücken auftritt. Relevanz: z.B. Astronomie (Sternen-Inneres), hohe Erdatmosphäre (Ionosphäre), künstliche Kern-Fusion.

$$\frac{n_i}{n_0} \sim \frac{(k_B T)^{3/4}}{n_0^{1/2}} e^{-W_i/(2k_B T)} \quad \text{Ionisations-Wahrscheinlichkeit}$$

( $W_i$ : Austrittsarbeit;  $n_i, n_0$ : Teilchendichten geladen/ungeladen)

Im Plasma koexistieren drei Teilchensorten (Elektronen, Rumpf-Ionen und Neutralteilchen), die jeweils untereinander im Gleichgewicht stehen, aber wegen ihrer unterschiedlichen Eigenschaften (stark verschiedene Massen bzw. Wechselwirkungs-Querschnitte) unterschiedliche Temperaturen besitzen.

- Elektrische und Wärme-Leitfähigkeit von Plasmen ist hoch:

$$\sigma \sim T^{3/2} \quad \lambda \sim T^{5/2}$$

- Störungen des Gleichgewichts resultieren in Plasma-Schwingungen:

$$\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon\epsilon_0}} \quad (\text{"Plasma-Frequenz"})$$

- Plasmen und eingeschlossene Magnetfelder sind aneinander gekoppelt: Geladene Teilchen werden entlang  $\vec{B}$ -Feldlinie geführt; wegen des hohen  $\sigma$  kann sich  $\vec{B}$ -Feld aber höchstens mit der magneto-hydrodynamischen Relaxationszeit

$$\tau = \frac{1}{4} \mu_0 \sigma R^2 \quad (R: \text{Ausdehnung des Plasmas})$$

verändern.

Folge: stellare Plasmen werden durch  $\vec{B}$ -Felder zusammengehalten!

→ Optik: Geometrische, Wellen-, Quanten-Optik

(a) Geom. Optik – Ausbreitung von Strahlen: optische Instrumente, etc.  
 Unterscheide: Reelle und Virtuelle Bilder!

(Beispiele: Lochkamera — Planspiegel)

Lochkamera: Vergrößerung  $\nu = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$

sphärischer Hohlspiegel:

Abbildungs-Gleichung  $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$  ( $f = r/2$ : Brennweite)

Vergrößerung  $\nu = -\frac{b}{g}$

(für Konkav- und Konvex-Spiegel; Unterschied: Vorzeichen von  $b$ !)

Brechung:  $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$  (Snellius)

reflektierte Amplitude:

$$\frac{E_R}{E_I} = \frac{n_1 \cos \alpha_1 - n_2 \cos \alpha_2}{n_1 \cos \alpha_1 + n_2 \cos \alpha_2} \quad (\text{Fresnel})$$

Reflektivität:  $R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{E_R^2}{E_I^2}$ ; Transmission:  $T = 1 - R$

Strahl wird am dichteren Medium zum Lot hin, am dünneren Medium vom Lot weg gebrochen; bei

$\alpha_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  am optisch dünneren Medium Totalreflektion!

- Dispersion: Brechzahl  $n$  eines Mediums ist wellenlängenabhängig (blaues Licht wird i. A. stärker gebrochen als rotes)
- Spektralzerlegung von “weißem” Licht im Prisma:

$$\sin\left(\frac{\delta + \gamma}{2}\right) = n(\lambda) \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

( $\delta$ : Ablenkwinkel gebrochener Lichtstrahl,  
 $\gamma$ : Winkel der brechenden Kante)

Abbildungsgleichung für Brechung an Kugelflächen:

$$\frac{n_2 - n_1}{r} = \frac{n_1}{g} - \frac{n_2}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{F}{g} + \frac{f}{b} = 1$$

( $n_1, F$ : Brechungsindex/Brennweite im Gegenstandsraum,  
 $n_2, f$ : Brechungsindex/Brennweite im Bildraum) oder

$$g' \cdot b' = f \cdot F \quad (g' = g - F; b' = b - f: \text{Newton'sche Abb.Gl.})$$

Abbildungsmaßstab:

$$v = \frac{B}{G} = \frac{n_1 b}{n_2 g}$$

Dünne Linsen:

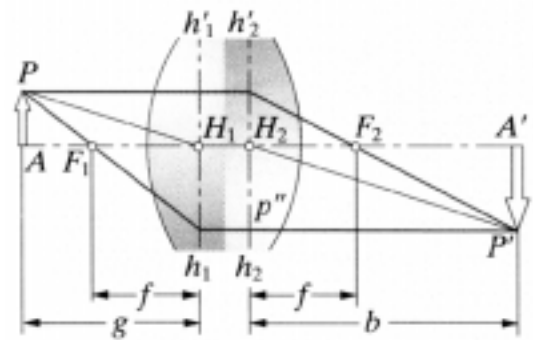
Winkelablenkung, und damit “Breckkraft”  $1/f$ , ist additiv:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad ([1/f] = 1 \text{ m}^{-1} = 1 \text{ dp})$$

Damit wird für  $n_1 = n_3$  vor und hinter Linse:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad v = \frac{b}{g} = \frac{f}{g - f} \quad (f = f(n_2, r_i)!)$$

→ Dicke Linsen und Linsensysteme werden durch zwei Hauptebenen beschrieben, von denen aus jeweils die Brennweiten, Gegenstands- und Bildweiten gemessen werden.



Wie für Dünne Linsen gilt:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

Die Lage der Hauptebenen ist nicht direkt aus der Geometrie der Optik ablesbar, kann aber berechnet oder, z.B. mit Hilfe des Bessel-Verfahrens, experimentell bestimmt werden. Abstand für Linse der Dicke  $d$  von dem Scheitelpunkt mit Krümmungsradius  $r_1$ :

$$\Delta = \alpha \cdot d = \frac{r_2}{r_2 - r_1} \frac{d}{n} \quad (n: \text{Brechungsindex})$$

→ Ein beliebig kompliziertes System aus Linsen kann auf zwei Hauptebenen reduziert werden. Ist  $d$  der Abstand zwischen hinterer und vorderer Hauptebene zweier benachbarter Linsen, so gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad \overline{H_1 H} = \frac{f d}{f_2}, \quad \overline{H' H'_s} = \frac{f d}{f_1}$$

→ Durch Segmentierung kann das Gewicht Dicker Linsen erheblich verringert werden (→ Fresnel-Linsen). Aber: für qualitativ hochwertige Abbildungen sind Fresnel-Linsen untauglich!

→ Abbildungsfehler

Geometriefehler: sphärische Aberration

Krümmungsfelder: Astigmatismus

Dispersionsfehler: chromatische Aberration

- Die Kohärenzlänge  $L$  eines Wellenzuges ist die Länge, um die man zwei Teilstrahlen gegen sich selbst verschieben kann, ohne daß diese ihre Fähigkeit zur Interferenz verlieren. Glühlampe:  $L \sim 0$
- Während die meisten natürlichen und technischen Lichtquellen inkohärent sind, weil ihre Elementarstrahler unkorreliert (“spontan”) emittieren, ist der LASER durch “stimulierte Emission” eine kohärente Lichtquelle:  $L \sim \infty$  (in der Praxis typisch: km)
- Interferenzoptiken: Stelle zwei räumlich getrennte kohärent emittierende Lichtquellen her! Beispiele: Fresnel’scher Winkelspiegel; Fresnel’sches Biprisma.

Interferenzbedingung:

$$\Delta l = N \cdot \lambda \quad N: \text{natürl. Zahlen (konstruktive Interferenz)}$$

$$\Delta l = (2N + 1) \cdot \lambda \quad (\text{destruktive Interferenz})$$

Anwendung auf Fresnel-Spiegel:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{R + l}{2R\alpha} \cdot \lambda \quad \text{Wellenlängenabhängigkeit des Abstands der Maxima auf Schirm, bzw.}$$

$$\lambda = \frac{R\alpha}{N \cdot (R + l)} \cdot \Delta \quad \text{Wellenlänge aus Geometrie}$$

$R$ : Abstand Spiegel–Lichtquelle,  $l$ : Abstand Spiegel–Schirm,  $\alpha$ : Winkel zwischen Spiegeln,  $\Delta$ : Abstand zwischen Maxima  $N$ -ter Ordnung

Kohärenzlänge  $L$  einer breiten ( $\Delta\lambda$ ) Spektrallinie um  $\lambda_0$ :

$$L = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

→ Interferenz an dünnen Schichten

Gangunterschied zwischen dem an Vorder- und Rückseite reflektierten Teilstrahl:

$$\Delta l = 2dn \cos \beta + \frac{\lambda}{2}$$

→ Interferenzbedingung (konstrukt. I.):

$$(2N + 1) \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}$$

→ An planparallelem Blättchen: Interferenzen gleicher Neigung

Am optischen Keil: Interferenzen gleicher Dicke (→ Interferenz-Mikroskopie)

Newton-Ringe: Luftspalt zwischen einander berührenden optischen Bauteilen unterschiedlicher Krümmung erzeugt Interferenzen gleicher Dicke

Vergütung von Optiken: Beträgt die Dicke einer optischen Schicht mit  $n_1$  auf einem vergüteten Bauteil mit  $n_2$

$$d = \frac{\lambda}{4n_1}, \quad 1 < n_1 < n_2$$

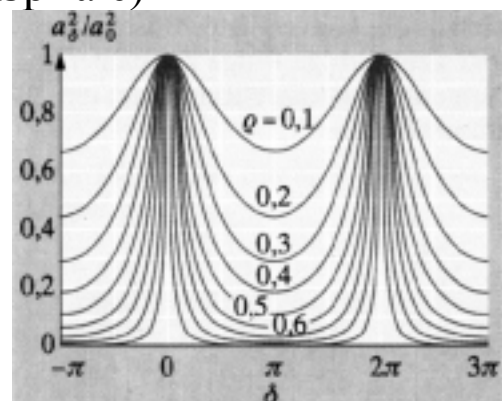
so wird die bei  $\lambda$  reflektierte Intensität vollkommen ausgelöscht (exakt nur für einen Wert von  $\lambda$  und senkrechten Einfall; Ausweg: Vielschichtvergütungen!)

→ Vielstrahlinterferenzen: Auswertung als geometrische Reihe oder im Zeiger-Diagramm (→ logarithmische Spirale)

→ Airy-Formel:

$$I = \frac{I(1)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos \delta}$$

Anwendung: Interferenzfilter



→ Interferometrie: Präzise Messungen optischer Weglängen mittels Vielstrahlinterferenz

Fabry-Perot: Interferenzen an dickem optischen Spalt. Halbwerts-

breite der Verstimmung:  $\Delta\delta = \frac{4}{\sqrt{F}}$ ;  $F = \left( \frac{2\rho}{1-\rho^2} \right)$

→  $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$   $\left( \frac{\pi}{2} \sqrt{F} : \text{Finesse} \right)$

Michelson-Interferometer: Variable Laufweg-Unterschiede durch verschiebbaren Spiegel im gekreuzten Strahlengang

→ Absolutmessungen

Beugung: Abweichung von der geometrischen Ausbreitungsrichtung an Hindernis durch Interferenz von Huygens'schen-Kugelwellen

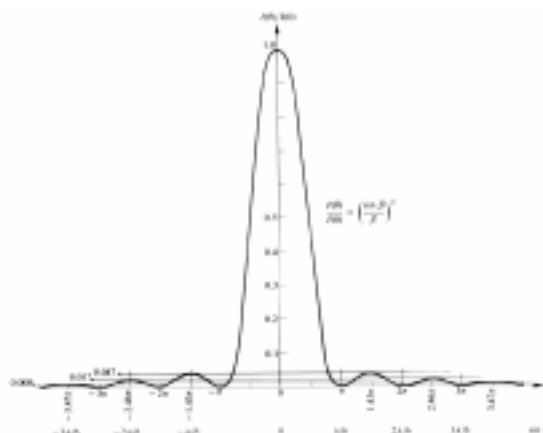
Fernfeld: Fraunhofer-Beugung; Nahfeld: Fresnel-Beugung

Aus Huygens-Prinzip folgt: Beugungsbild ist Fourier-Transformierte des beugenden Objektes!

$$I(k_x) = I_0 \frac{\sin^2\left(k_x \frac{b}{2}\right)}{\left(k_x \frac{b}{2}\right)^2}$$

Einzelspalt:

( $b$ : Spaltbreite)



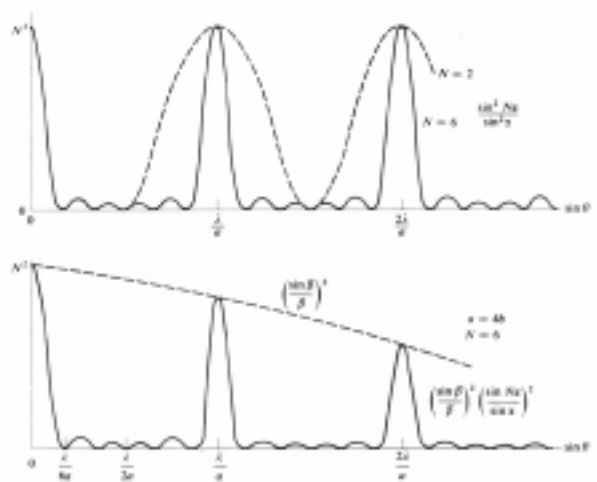
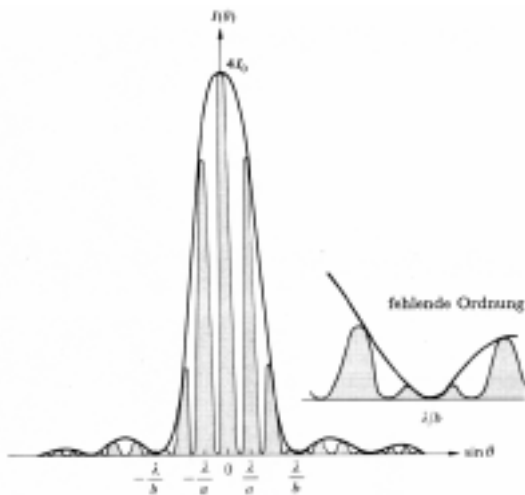
Viele Spalte? – Faltungstheorem!

$$g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(X-x)dx \leftrightarrow g = f \otimes h$$

$$\rightarrow G(k) = F(k) \cdot H(k)$$

(Fouriertrafo von  $g$  ist Produkt der Trafos der Einzelkomponenten)

$$\rightarrow I_{\text{Doppelspalt}}(k_x) = 4I_0 \frac{\sin^2(k_x \frac{b}{2})}{(k_x \frac{b}{2})^2} \cdot \cos(k_x \frac{a}{2}) \quad (a: \text{Abstand})$$



$$\rightarrow I_{\text{Spaltgitter}}(k_x) = N^2 I_0 \frac{\sin^2(k_x \frac{b}{2})}{(k_x \frac{b}{2})^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{Nk_x a}{2}}{\sin^2 \frac{k_x a}{2}}$$

(Spaltanzahl  $N = \infty$ : alle Ordnungen gleich hell)

Reflektions-Phasengitter (*blazed grating*): Gitteroberfläche ist so geschnitten, daß maximale Beugungs-Intensität nicht in nullter, sondern in erster Ordnung der Arbeitswellenlänge erfolgt.

$$I = I_{\text{Spaltg.}} \frac{\sin^2 \Theta}{\Theta^2}, \quad \Theta = k_x \frac{a}{2} \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \left( \tan \frac{\vartheta}{2} - \tan \gamma \right), \quad \gamma: \text{blaze-Winkel}$$

→ Beugung an zweidimensionalem Objekt:

$$E(k_x, k_y) = \frac{E_0 e^{i(\omega t - kR)}}{R} \int_{\text{Öffnung}} e^{i(k_x x + k_y y)} dS$$

→ z. B. Rechteck-Öffnung:

$$I = \frac{EE^*}{2} = I_0 \frac{\sin^2\left(k_x \frac{a}{2}\right) \sin^2\left(k_y \frac{b}{2}\right)}{\left(k_x \frac{a}{2}\right)^2 \left(k_y \frac{b}{2}\right)^2}$$

Bessel-Funktion  $m$ -ter Ordnung:

$$J_m(u) = \frac{i^{-m}}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(mv + u \cos v)} dv; \quad J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{iu \cos v} dv$$

$$\int_0^u v J_m(v) dv = u J_{m+1}(u); \quad J_m(u) = \frac{d}{du} J_{m+1}(u) + \frac{J_{m+1}(u)}{u}$$

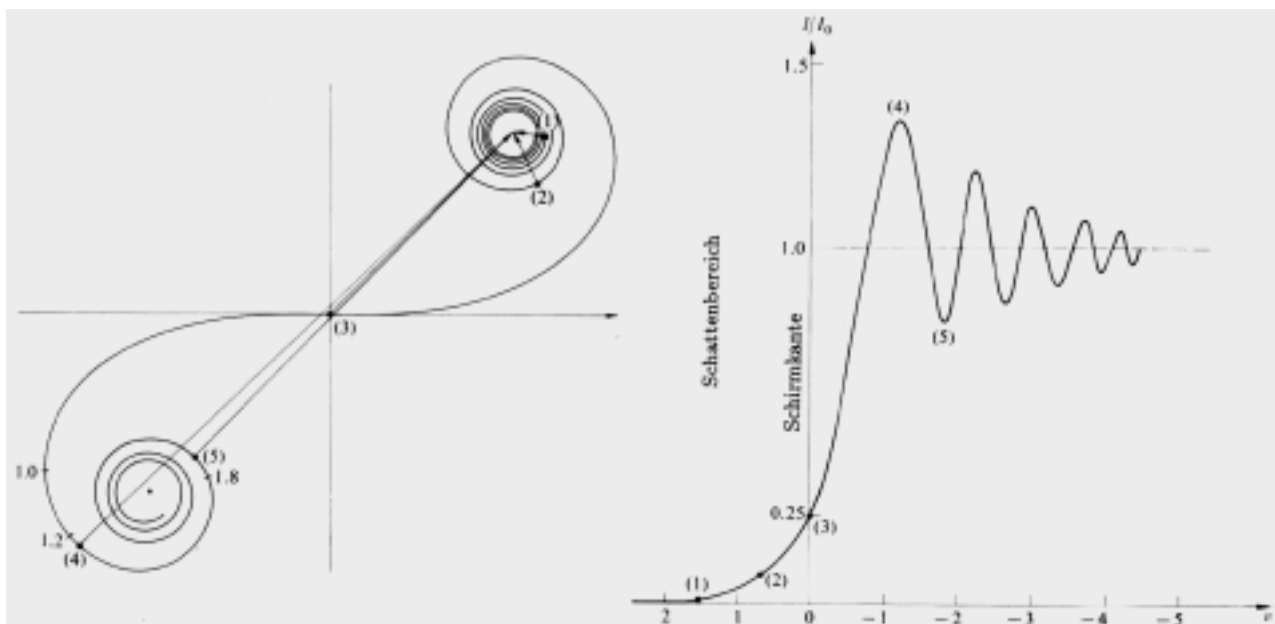
→ Lochblende:

$$I = \frac{E_0^2 A^2}{R^2} \left( \frac{2J_1(kaP/R)}{kaP/R} \right)^2 = I_0 \left( \frac{2J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2$$

→ Rayleigh-Kriterium für optische Auflösung:

$$P_1 = \frac{3.83 \lambda R}{\pi 2a}; \quad \Delta\theta_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

- Fresnel-Beugung ist in der mathematischen Behandlung aufwendiger als Fraunhofer-Fall (Schirm bei  $D \sim \infty$ , Öffnung  $d \ll D$ ).
- Löse Problem graphisch im Zeigerdiagramm: Cornu-Spirale!  
 z. B. Beugung an Kante: Auf Schirm interferierende Huygens-Wellen entstehen in gesamter Halbebene jenseits Kante. Daher muß Summation von  $x = 0$  bis  $x = \infty$  durchgeführt werden
- Fraunhofer-Näherung nicht mehr gültig!



Aktive Zone der Cornu-Spirale bei denjenigen Werten von

$$w = -\frac{(x-x')}{\sqrt{\lambda D}}, \text{ wo in Ebene des beugenden Gegenstandes bei } x'$$

Licht durchgelassen wird und Huygens-Wellen entstehen. Die Summation bis  $x = \infty$  wird geometrisch durchgeführt, indem Konvergenzpunkt der Spirale, dessen Lage aus deren Geometrie bekannt ist, als Endpunkt des Feldvektors angenommen wird.

Besitzt beugendes Objekt mehrere Kanten, so hat Cornu-Spirale entsprechend mehrere aktive Zonen. Beugung an strichförmiger Blende (z.B. Draht): Beugungsbild ist im Zentrum immer hell!  
 Babinet-Prinzip: Im Fernfeld sind Beugungsbilder eines Gegenstands und seines Negativs ununterscheidbar (nur Phase  $\delta$  verschieden).

- Beugung an 3D-Gittern (sich wiederholenden Strukturen im Raum) wird im gleichen Formalismus behandelt wie Beugung an 2D-Gittern  
Anwendung: Röntgen-Beugung an Kristallgittern

Bragg-Bedingung:

$$2d \cos \vartheta = n \cdot \lambda$$

z.B. Laue-Beugung: Spiegelung an einer zur Durchstrahlrichtung geneigten Netzebene  $\{h, k, l\}$  erzeugt Röntgen-Reflex, der von Position des direkten Strahls um doppelten Neigungswinkel abgelenkt ist. → Diskrete punktförmige Interferenzmaxima auf Schirm, die von Strahlung verschiedener Wellenlänge verursacht werden. Intensität umgekehrt proportional zum Netzebenenabstand ( $\times$  Formfaktor)

- Abbé'sche Abbildungstheorie: Linse erzeugt FT der Helligkeitsverteilung des Objekts in konjugierter Ebene und reelles Bild in Gegenstandsebene: Abbildung als zweifacher Beugungsprozeß!

→ Für wirklichkeitsgetreue Abbildungen müssen hohe Beugungsordnungen (hohe "Raumfrequenzen"  $k_x, k_y$ ) vom abbildenden System übertragen werden

→ "Raumfilterung": Wird konjugiertes Zwischenbild (in optischer Projektion oder bei Fourier-Trafo in Computer) manipuliert, so können gezielt globale Merkmale des Originals beeinflusst werden.

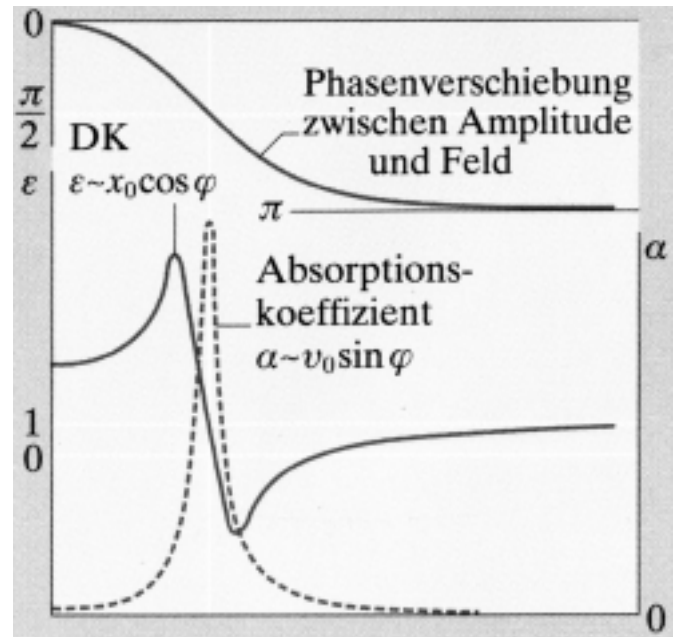
→ Beispiel ("Lunar Orbiter"): Horizontale Streifen im Bild führen zu polaren Reflexen in der FT. Nach Eliminierung dieser Reflexe und Rück-Trafo: "normales" Bild.

→ Dispersion ist ein atomares/molekulares Resonanz-Phänomen:  
 Externes elektrisches Wechselfeld (Frequenz  $\hat{\omega}$ ) verzerrt  
 Elektronenwolke auf Molekül umso mehr, je näher  $\hat{\omega}$  an der Eigen-  
 frequenz  $\omega_0$  des Systems liegt. Aber:

Nahe  $\omega_0$  ist die Geschwindig-  
keit der Ladungsverschiebung,  
 also der Strom, in Phase mit  
 externen Feld → Wirkleistung,  
 die dem Feld entnommen wird  
 → Absorption!

(Sowohl weit unterhalb als  
 auch weit oberhalb von  $\omega_0$  ist  
 Phase zwischen Strom und  
 Feld  $\pm \pi/2$ , und damit

Wirkleistung = 0)



$$a(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\epsilon(\omega') - 1}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad a: \text{Absorptionskoeffizient}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' \cdot a(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega' \quad \epsilon: \text{Dielektrizitätskonstante}$$

(Kramers-Kronig-Beziehung)

Spektrale Auflösung von Gittern und Prismen in Monochromatoren:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = z \cdot N \quad (\text{Gitter mit } N \text{ Strichen; Ordnung } z)$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = d \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (\text{Prisma mit Basislänge } d)$$

→ Elliptisch polarisiertes Licht entsteht aus der Überlagerung zweier linear polarisierter Strahlen gleicher Frequenz aber unterschiedlicher Phase  $\varphi$ . Die Projektion der  $\vec{E}$ -Vektoren auf eine Fläche senkrecht zur Ausbreitungsrichtung ist gegeben durch die Ellipsengleichung

$$\left(\frac{E_y}{E_{0,y}}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_{0,z}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{0,y}}\right)\left(\frac{E_z}{E_{0,z}}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

Diese Ellipse ist um den Winkel  $\alpha$  gegen das Koordinatensystem  $(y,z)$  geneigt:

$$\tan 2\alpha = \frac{2E_{0,y}E_{0,z}\cos\varphi}{E_{0,y}^2 - E_{0,z}^2}$$

Die Spezialfälle linear ( $\varphi = 0, \pm\pi$ ) und zirkular ( $\varphi = \pm\pi/2, E_{0,y} = E_{0,z} = E_0$ ) polarisiertes Licht sind darin enthalten.

→ Jeder Polarisationszustand kann durch Phasenverschiebung aus den anderen Polarisationszuständen hervorgehen.

Polarisatoren nutzen die Symmetriebrechung (Anisotropie) eines Vorgangs (selektive Absorption, Doppelbrechung, Reflexion, Streuung), um den Polarisationszustand von Licht zu verändern.

Selektive Absorption (Dichroismus) entsteht durch anisotrope elektrische Leitfähigkeit eines vom Lichtstrahl durchdrungenen Mediums in Richtung der beiden orthogonalen Polarisationsvektoren (Beispiel: Polaroid-Filter)

Intensität nach Durchgang durch dichroitische Filter (Linear-Polarisator) im Winkel  $\theta$  gegen anfängliche Linear-Polarisation:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta \quad (\text{Satz von Malus})$$

- Kristalle sind anisotrope Materialien: die Bindungskraft von Ladungen aneinander kann abhängig von der Raumrichtung sein
- Dispersionsrelation anisotrop → Absorption entlang verschiedener Richtungen unterschiedlich ("Dichroismus"; → Linearpolarisatoren) oder Brechungsindex entlang verschiedener Richtungen verschieden ("Doppelbrechung")
  - z. B. Kalkspat (optisch einachsig negativer Kristall):  $n_{\perp} > n_{\parallel}$  ( $\perp$ ,  $\parallel$  bzgl. optischer Achse); Quarz ist optisch einachsig positiv.
  - Tritt unpolarisierter Strahl in Kristall-Hauptschnitt ein, so geht Anteil mit  $\parallel$ -Polarisation unverzerrt durch (*o*-Strahl);
  - Anteil mit Polarisation senkrecht dazu (*e*-Strahl) besitzt Komponenten  $\perp$  und  $\parallel$  zu o.A., die im Kristall unterschiedliche Laufgeschwindigkeiten besitzen → Huygens-Wellen sind Ellipsoid-Flächen
  - *e*-Strahl verläuft schräg im Kristall mit Wellenfronten  $\parallel$  zu Kristalloberfläche! ( $\epsilon$  ist Tensor →  $\vec{E}$  ist nicht  $\parallel$   $\vec{D}$ )

### Anwendungen

Linear-Polarisatoren nutzen Doppelbrechung zur Auftrennung der Komponenten  $\perp$  und  $\parallel$  zu o.A.

Nicol: Totalreflektion des Strahls mit höherem  $n$  an Grenzfläche zu Medium mit  $n$ -Wert zwischen dem der beiden Kristallrichtungen

Glan-Faucault (Glan-Thomson): Totalreflektion des Strahls mit höherem  $n$  an Fläche unter einem Winkel, für den der andere Strahl gerade noch durchgeht

Wollaston: Aufspaltung von *e*- und *o*-Strahl bei schrägem Eintritt in doppelbrechendes Medium

Phasenschieber: Dickenabhängige Verschiebung der relativen Phase zwischen Strahlen mit Polarisation  $\parallel$  und  $\perp$  zu o.A.

- Phasenschieber sind Plättchen aus optisch einachsigen Kristallen mit o.A.  $\parallel$  zur Oberfläche. Laufen 2 Strahlen ( $\perp$  und  $\parallel$  zur o.A. polarisiert) durch Platte, so ist Ausbreitungsgeschwindigkeit verschieden, d.h. relative Phase verändert sich mit Laufweg durch Kristall.

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot d \cdot (|n_{\perp} - n_{\parallel}|)$$

→ ein “ $\lambda/4$ -Plättchen” schiebt Phase für eine bestimmte Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  um  $\pi/2$ : Linear polarisiertes Licht ( $45^\circ$  gegen o.A.) wird in zirkular polarisiertes Licht umgewandelt und umgekehrt.

- Kompensatoren sind keilförmige optische Elemente, bei denen Phasenverschiebung für  $\lambda_0$  durch Veränderung der optischen Weglänge kontinuierlich eingestellt werden kann.
- Reflektion an dielektrischen Medien oder Streuung verändern Polarisationszustand von Licht: Einfallende Welle regt Elementar-Oszillatoren im Medium an, die anisotrop bzgl. Polarwinkel emittieren.

Hertz'scher Dipol:  $P(\vartheta) \propto p^2 \sin^2 \vartheta$

→ Reflektierte Intensität von Polarisations-Komponente  $\parallel$  zur Einfallsebene ist – je nach Einfallswinkel – stark reduziert, und verschwindet vollständig am Brewster-Winkel

$$\tan \alpha_B = \frac{n_1}{n_2}$$

Fresnel:  $R_{\perp} = r_{\perp}^2 = \left( \frac{E_0^{r,\perp}}{E_0^{i,\perp}} \right)^2 = \frac{\sin^2(\alpha_i - \alpha_t)}{\sin^2(\alpha_i + \alpha_t)}$

$$R_{\parallel} = \dots = \frac{\tan^2(\alpha_i - \alpha_t)}{\tan^2(\alpha_i + \alpha_t)}$$

- Material mit unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten für R- und L-zirkular polarisiertes Licht heißt *optisch aktiv*. Folge: Phase zwischen R- und L-Licht ändert sich kontinuierlich mit steigendem Laufweg → Polarisationsvektor von linear polarisiertem Licht *dreht* sich kontinuierlich.

$$\Delta\varphi = \alpha = \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot d \cdot (|n_R - n_L|)$$

$\Delta\varphi$ : Phasenverschiebung,  $\alpha$ : Richtung des Pol.-Vektors

Ursache: "Händigkeit" (Chiralität) der Atomanordnung in Kristall (Bsp. Quarz: "enantiomorpher" Kristall) oder von Molekülen in Lösung/Kristallen (Bsp. Biomoleküle: Proteine, Nucleinsäuren, Zucker); Mischung R- und L-chiraler Moleküle heißt "racemisch".

$$\alpha = [\alpha] \cdot c \cdot d \quad [\alpha]: \text{spezifische Rotation, } c: \text{Konz.}$$

- Optische Aktivität ist Funktion von  $\lambda$ : "Rotationsdispersion"
- Optische Anisotropie kann von externen Feldern induziert werden:  
 (a) Faraday-Effekt (magneto-optischer Effekt) → optische Aktivität:  
 $\alpha = V \cdot B \cdot d$   $V$ : Verdet-Konstante

(b) Kerr-Effekt (quadr. elektro-opt. Effekt) → Doppelbrechung:

$$\Delta n = |n_{\perp} - n_{\parallel}| = \lambda_0 K E^2 \quad K: \text{Kerr-Konstante}$$

$$E_{\lambda/2} = \frac{1}{\sqrt{2dK}} \quad \text{Feld für } \Delta\varphi = \pi \text{ bei Laufweg } d$$

(c) Pockels-Effekt (lin. elektro-opt. Effekt) → Doppelbrechung:

$$\Delta n = n_{\perp}^3 r_{63} d \cdot V; \quad V_{\lambda/2} = \frac{\lambda_0}{2n_{\perp}^3 r_{63}} \quad r_{63}: \text{Tensor-Komp.}$$

Anwendungen: opt. Schalter, Kurzzeit-Laser, Datenübertragung

## Quantenoptik/Atomphysik

→ Aus Strahlungsgleichgewicht zwischen Körpern folgt (Kirchhoff):

$e_\nu = \varepsilon(\nu, T) \cdot A_\nu$       spezifisches Emissionsvermögen  
 einer Fläche bei  $T$  ist proportional zu Absorptionsvermögen; höchstes Emissionsvermögen besitzt schwarze Fläche!

Realisierung eines Schwarzen Strahlers ist Hohlraumstrahler.

Spektrale Emissionskurve ist glockenförmig und erinnert an Maxwell-Boltzmann-Verteilung.

Gesamte emittierte Energie:

$$e_{tot}(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\nu, T) d\nu = \sigma \cdot T^4; \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

Maximum der Emissionsintensität:

$$\nu_{max} = const \cdot T \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{max} = const \cdot \frac{1}{T}$$

Wien'sches Verschiebungsgesetz

Spezifische spektrale Dichte von Strahlungsfeld in Hohlraumstrahler

$$\rho_\nu = \frac{8\pi}{c} \cdot \varepsilon_\nu$$

Damit lautet Kirchhoff'sches Gesetz:

$$\rho_\nu d\nu = F(\nu, T) d\nu$$

F ist eine universelle Funktion; es genügt, ein Schwarzkörper-Spektrum zu bestimmen, um allgemeingültiges Gesetz zu kennen

Klassische Versuche zur Beschreibung des Strahlungsfeldes  $\rho_\nu$ :

$$\rho_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot k_B T \quad (\text{Rayleigh-Jeans})$$

aus Abzählung der Moden stehender Wellen in Hohlraum und mittlerer Energie pro Mode nach Gleichverteilungssatz

$$\langle E_{kl} \rangle = \frac{\int_0^\infty E P_0 \cdot e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty P_0 \cdot e^{-E/k_B T} dE} = k_B T. \quad (P_0: \text{Referenzwahrscheinlichkeit})$$

→ Überschätzung der Energie des Strahlungsfeldes bei hohen  $\nu$  ("UV-Katastrophe"). Alternativer Versuch (Wien):

$$\rho_\nu(\nu, T) = \text{const} \cdot \nu^3 \cdot F\left(\frac{\nu}{T}\right) = \text{const} \cdot \nu^3 \cdot e^{-\beta \cdot \frac{\nu}{T}}$$

erfüllt Stefan-Boltzmann- und Verschiebungsgesetz. Versagt bei kleinen  $\nu$ . Interpolationsgesetz (Planck):

$$\rho_\nu(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \left( \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \right) = \left( \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \right) \cdot \left( \frac{hc}{\lambda k_B T} - 1 \right)$$

Beschreibt experimentelle Daten zufriedenstellend, setzt aber voraus, daß Strahlungsenergie in Quanten abgegeben wird:

$$E_n^{\text{OSZ}}(\nu) = n \cdot h\nu \quad (h = 6.625 \times 10^{-34} \text{ Js: "Wirkungsquantum"})$$

Durchschnittliche Energie pro Mode muß nun so berechnet werden:

$$\langle E_{QM} \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n P_0 \cdot e^{-E_n/k_B T}}{\sum_{n=0}^{\infty} P_0 \cdot e^{-E_n/k_B T}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} \quad \rightarrow \text{Planck-Gesetz}$$

- Weitere Evidenz, daß das Strahlungsfeld quantisiert ist: Photoeffekt
- Photonen erzeugen Photoelektronen beim Auftreffen auf Metalloberfläche: Ist Photonenenergie kleiner als Auslösearbeit  $\phi$ , werden überhaupt keine Elektronen detektiert (im klassischen Bild würde Strahlungsfeld über langen Zeitraum akkumuliert, solange bis  $\phi$  aufgebracht ist). Mit Gegenspannung  $V_s$  zwischen Emitter und Kollektor läßt sich kinetische Energie der ausgelösten Photoelektronen bestimmen:

$$eV_s = E_{kin}^{max} = h\nu - \phi$$

- Grenzfrequenz  $\nu_0$  der Photonen für Photoelektronen:

$$\nu_0 = \frac{\phi}{h}$$

Auf der anderen Seite setzt Photostrom instantan bei Belichtung ein, solange selbst für geringste nachweisbare Lichtintensitäten  $\nu_0$  überschritten ist.

- Erzeugung von Röntgen-Strahlung: Schnelle Elektronen werden an massiver metallischer Anti-Kathode abrupt abgebremst. Es entsteht Spektrum, in dem breiter Untergrund (Bremsstrahlung) von "charakteristischen Linien" überlagert ist. Bremsstrahlung ist unabhängig von Antikathoden-Material, aber abhängig von Beschleunigungsspannung  $U$ , die auf Elektronen wirkt.

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$$

Charakteristische Linien sind spezifisch für Target-Material und hängen mit dessen Atombau zusammen.

Besitzt elektromagn. Welle Teilchencharakter, so sollte das Photon auch Impuls besitzen. Compton-Effekt: Streuung hochenergetischer Photonen an (lose) gebundenen Elektronen. Aus Relativitätstheorie:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{relativistisches Teilchen (Ruhemasse } m_0)$$

und

$$p = \frac{m \cdot v}{c^2} \quad \text{Impuls für Teilchen mit/ohne Ruhemasse}$$

$$\rightarrow p = \frac{h \cdot \nu}{c} \quad \text{Impuls des Photons}$$

→ Stoß (analog zu klassischer Mechanik) durch Energie- und Impulserhaltung bestimmt. → Wellenlängenverschiebung für Photon:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_0 c} (1 - \cos \phi) \quad (m_0: \text{Elektron-Ruhemasse, } \phi:$$

Streuwinkel des Photons,  $\Lambda = \frac{h}{m_0 c}$  : Compton-Wellenlänge)

→ Partikel-Welle-Dualismus: Wellenfelder haben auch Partikel-Charakter. Partikel besitzen auch Welleneigenschaften. De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p}; \quad \nu = \frac{E}{h} \quad \text{Wellenlänge und Frequenz von Materieteilchen}$$

ist für makroskopische Teilchen (Tischtennisball) nicht beobachtbar wegen Kleinheit der Konstante  $h$ . Nachweis, z.B. für Elektronen: Elektronenbeugung (Germer & Davisson)

Wellenpaket zur Beschreibung lokalisierten Teilchens entsteht aus Fourierintegral (und analoge Beziehung in  $\omega$  und  $t$ ):

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} e^{ik_x x} dk = \frac{\Delta k}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin\left(\frac{\Delta k_x x}{2}\right)}{\frac{\Delta k_x x}{2}} e^{ik_x x}$$

→ Folgerung: Obwohl Welle bei Zentralwellenlänge  $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$  schwingt,

sich auch andere Anteile enthalten.

→ Dispersion: Puls läuft in Raum und Zeit auseinander.

Geschwindigkeit der Einhüllenden ("Gruppengeschwindigkeit"):

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = v_p \Big|_{k_0} + k \left. \frac{dv_p}{dk} \right|_{k_0} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{\hbar k_0}\right)^2}} = \left. \frac{c^2}{v_p} \right|_{k_0}$$

kann mit Teilchengeschwindigkeit identifiziert werden ( $v_g \leq c$ !).

→ Dispersion selbst im leeren Raum! Was heißt das?

→ (1) Wellenfunktion  $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$  bestimmt Wahrscheinlichkeitsdichte, Teilchen in  $\{(\vec{r}, t) \dots (\vec{r} + d\vec{r}, t + dt)\}$  zu finden.

$$w(\vec{r}, t) d^3 r dt = \Psi^* \Psi d^3 r dt \quad (\text{Schrödinger})$$

→ (2) Verknüpfung der Impuls-/Ortsbeziehung über Fourierintegral

→ Unschärferelation (Heisenberg)

$$\Delta p_x \Delta x \geq \frac{\hbar}{2}; \quad \Delta \omega \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

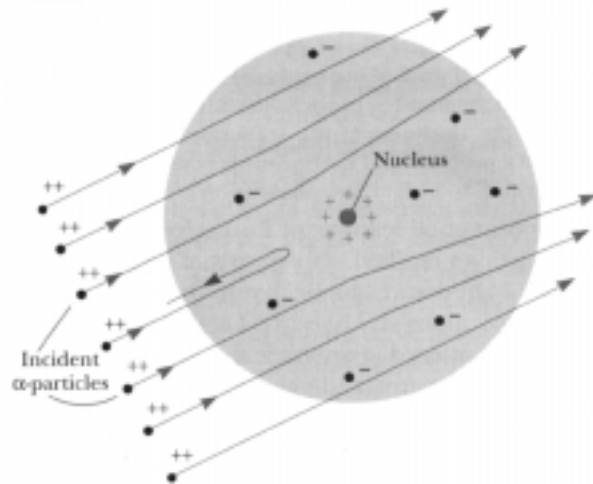
→ Ist Teilchen zur Zeit  $t = t_0$  bei  $\vec{r}$  scharf lokalisiert, so ist Impulsunschärfe groß und Teilchen kann bei  $t > t_0$  schlecht lokalisiert

werden. → Beispiel: Elektronenbeugung am Doppelspalt

Zur inneren Struktur von Atomen:

4 Experimente sind grundlegend für Nachweis, daß ('unteilbare') Atome tatsächlich innere Struktur besitzen:

- Elektrolyse (Faraday 1833): Elemente können Ladungszustand ändern!
- Kathodenstrahlen (Thomson 1897) bestehen aus Elektronen; Elektronen sind Bestandteil *aller* Atome; Bestimmung von  $e/m$
- Bestimmung der Elementarladung (Millikan 1911)  $\rightarrow m_e < 1/1000$  der Masse des H-Atoms!
- Streuung von  $\alpha$ -Strahlen an Metallfolien (Rutherford 1913): Atome
  - sind weitgehend "leer"
  - besitzen kompakten positiv geladenen Kern
  - Elektronen sitzen im Außenbereich



Rutherford'sche Streuformel:

$$dN = nN_0 \left( \frac{Ze^2}{m_\alpha v^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \vartheta/2}$$

- Präzise Bestimmung von Kernladungszahlen  $Z$ :  $Z \equiv$  Ordnungszahl! Kerne sind schwerer als  $Z \times m_{Proton}$  (positiver Kernbaustein Proton  $\equiv$  Wasserstoffkern!): Wodurch kommt Extra-Gewicht zustande?
  - NeuZusammenbrechen tron!
- Abweichung von Rutherford-Streuformel bei hohen Energien der  $\alpha$ -Teilchen/leichten Kernen  $\rightarrow$  Abschätzung des Kerndurchmessers:  $d_{Kern} \sim 10^{-14} \text{ m} = 10^{-4} \text{ \AA} (\sim 10^{-4} \times d_{Atom})!$

Wie werden Elektronen in Atomhülle gegen Aufprall auf positiv geladenen Kern stabilisiert?

- Klassische Elektrodynamik: Auf "Planetenbahn" kreisendes Elektron wird durch Zentripetalkraft beschleunigt und müßte strahlen. Durch Energieverlust wäre Atom instabil. Kontinuierliches Spektrum erwartet!
- Aber: Atomspektren sind *Linien*spektren, sowohl in Emission als auch in Absorption (Fraunhofer-Linien). Angeregte Gase emittieren, kühle Gase absorbieren *dieselben* Linien!
- Balmer (1885): Wasserstoffspektren bestehen aus Serie der Form:

$$\nu = R \left( \frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad n_1, n_2: \text{natürliche Zahlen, } n_2 > n_1$$

$R \sim 1.0974 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ : Rydberg-Konstante

$n_1 = 1$ : Lyman-Serie;  $n_1 = 2$ : Balmer-Serie;  $n_1 = 3$ : Paschen-Serie

- Bohr'sche Postulate:
- Maxwell-Theorie gilt nicht in atomaren Dimensionen!
- Es gibt (verschiedene) stationäre Zustände für Hüllenelektron.
- Der Bahn-Drehimpuls ("Bahnmoment") ist quantisiert:

$$\vec{L}_{\text{Bahn}} = m\vec{v} \times \vec{r} = n\hbar$$

- Nur beim Übergang zwischen stabilen Bahnen (verschiedener potentieller Energie) wird Strahlung emittiert/absorbiert:

$$E_f - E_i = \hbar\omega$$

- Rutherford/Bohr'sches Atommodell

→ Stationäre Zustände im Bohrschen Atom-Modell:

$$E_n^{total} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r_n} \quad \text{mit } r_n = 4\pi\epsilon_0 \frac{n^2 \hbar^2}{m_e e^2}$$

→ Bohr'scher Radius des Atoms im Grundzustand:

$$r_1 \equiv a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0.529 \text{ \AA}$$

$$\rightarrow E_n^{total} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_0} \frac{1}{n^2}$$

Übergangsfrequenzen:

$$\omega_{i \rightarrow f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_0 \hbar} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right)$$

$$\rightarrow R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2a_0 hc} : \quad \text{Rydberg-Konstante}$$

Physikalische Erklärung der Bohr'schen Quantenbedingung:

Nur diejenigen Elektronenbahnen sind stabil, auf denen die Elektronen-*Welle* (de Broglie!) *konstruktiv* mit sich selbst interferiert und dabei stehende Wellen ausbildet! → Bahnumfang ist Vielfaches der de-Broglie-Wellenlänge. Alle dazwischen liegenden Zustände interferieren *destruktiv*.

Experimenteller Nachweis der Quantisierung von Zuständen in Atomen: Franck-Hertz-Versuch!

Korrespondenz-Prinzip: Quantenmechanische Ergebnisse gehen für hohe Quantenzahlen ( $n \rightarrow \infty$ ) in Gesetze der Klassischen Physik über.

→ Magnetisches Dipolmoment des gebundenen Elektrons:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad \frac{\mu}{L} = \frac{e}{2m_e}: \text{gyromagnetisches Verhältnis}$$

→ Im Magnetfeld  $\vec{B}$  wird Drehmoment  $\vec{M}$  auf Atom ausgeübt:

$$\vec{M} = \vec{\mu} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\rightarrow \omega_L = \frac{M}{L} = \frac{e}{2m_e} B: \text{Larmor-Frequenz}$$

Bahndrehimpuls und seine Projektion auf  $\vec{B}$ -Achse sind quantisiert:

$$|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1 \text{ und}$$

$$L_z = \hbar m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

für Elektron:

$$|\vec{\mu}_l| = \frac{e\hbar}{2m_e} \sqrt{l(l+1)} \quad \text{mit } \beta = \frac{e\hbar}{2m_e}: \text{Bohr-Magneton}$$

$$\rightarrow E_m = \beta \cdot m \cdot B \quad \text{Energie des Atoms in } \vec{B}$$

$$\cos \theta = \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} \quad \text{Einstellwinkel des Dipols zu } \vec{B}$$

Elektron hat neben Bahndrehimpuls auch *Eigendrehimpuls*: "Spin"

$$|\vec{s}| = \hbar \cdot \sqrt{s(s+1)} ; s_z = \hbar \cdot m_s$$

$$|\vec{\mu}_s| = \beta \cdot \sqrt{s(s+1)} ; \mu_{s,z} = -\beta \cdot m_s$$

Stern-Gerlach-Versuch  $\rightarrow s = 1/2$

Korrekturen (Quantenelektrodynamik und Spin-Bahn-Kopplung):

$$\text{Landé-Faktor } g \rightarrow |\vec{\mu}_l| = g \cdot \beta \cdot \sqrt{l(l+1)} ; \mu_z = -g \cdot \beta \cdot m$$

Strikte quantenmechanische Behandlung → bessere Beschreibung der Atomhülle als im einfachen Bohr'schen Modell

Energiesatz in QM: Schrödinger-Gleichung. Zeitabhängig:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(\vec{r}, t) + U(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + U(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}) \quad \text{zeitunabhängig}$$

$$\rightarrow \Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{i\omega t}; \quad \omega = E/\hbar$$

Beispiel – Teilchen mit Masse  $m$  in kubischer Box mit Seitenlänge  $a$ : Sowohl Impuls als auch Energie ist quantisiert.

$$|p_i| = n_i \frac{\pi \hbar}{a} \quad (i = x, y, z); \quad E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

In Atomhülle von H und H-ähnlichen Atomen ist  $U(\vec{r}) = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ .

Coulomb-Potential ist *konservativ*: Sowohl  $E$  als auch  $\vec{L}$  sind Erhaltungsgrößen, und damit "Kandidaten" für Quantisierung.  $L_x$ ,  $L_y$  und  $L_z$  können wegen Unschärfe-Relation aber nicht gleichzeitig scharf bestimmt sein →  $E$ ,  $|\vec{L}|$  und  $L_z$  sind quantisiert.

Schrödinger-Gleichung ist separierbar ( $\psi(\vec{r}) = R(r)\theta(\vartheta)\phi(\varphi)$ ), wenn

$$\frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = -m_l^2 \phi; \quad \frac{d^2 \theta}{d\vartheta^2} + \cot \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} - \frac{m_l^2 \theta}{\sin^2 \vartheta} = -l(l+1)\theta$$

$$\rightarrow |\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar \quad (l=0,1,2,\dots) \quad \text{und} \quad L_z = m_l \hbar \quad (m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l)$$

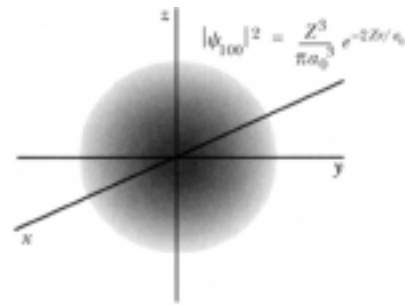
Radialanteile  $R_{n,l}(r)$  der Atom-Wellenfunktionen beinhalten Produkte aus Polynomen und Exponentialfunktionen in  $\xi = Zr/a_0$ :

$$R_{n,l}(\xi) = \left(\frac{\xi}{n}\right)^{3/2} \cdot P_{n,l}(\xi) \cdot e^{-\xi/n}, \text{ z. B. H-Grundzustand:}$$

$$R_{1,0}(r) = \left(\frac{Zr}{na_0}\right)^{3/2} \cdot 2 \cdot e^{-Zr/na_0}$$

Zur Bedingung  $m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$  tritt  $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ .

Quadrat der Wellenfunktion beschreibt Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im Raum:



$$w(\vec{r}) = |\psi(r, \vartheta, \varphi)|^2 = |R(r) \cdot \theta(\vartheta) \cdot \phi(\varphi)|^2$$

→ Elektronenzustand bildet nicht ringförmige Bahn um Kern, sondern im Raum verteilte Elektronenwolke: "Orbital".

Aus Lösung der S-Gleichung folgt für Ein-Elektronen-Atome:

$$E_n = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{2a_0} \left(\frac{Z^2}{n^2}\right)$$

→ Eigenschaften dieses Bohr-Sommerfeld-Atommodells sind *ähnlich* wie bei einfachem Bohr'schen Modell, aber Details sind anders. Beispiel:  $a_0$  ist Abstand vom Kern, bei dem  $w(r)$  am größten ist. Für höhere  $n$  liegen die wahrscheinlichsten Radien in etwa (aber nicht genau) bei  $r_{max} = a_0 n^2$ .

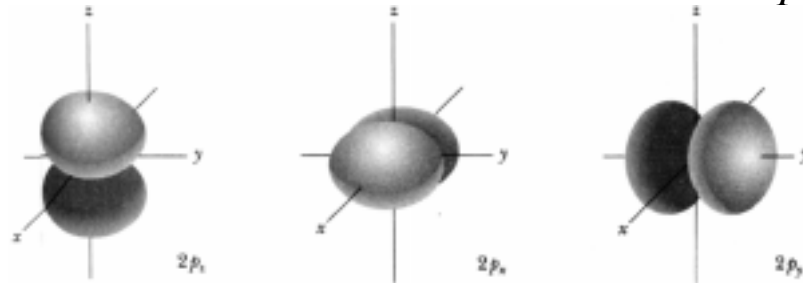
Elektronenzustände gleicher Hauptquantenzahl  $n$  bilden "Schale":

$K, L, M, N, \dots$  für  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Subzustände (Nebenquantenzahl  $l$ ) werden bezeichnet mit

$s, p, d, f, \dots$  für  $l = 0, 1, 2, 3 \dots$

Während  $s$ -Orbitale kugelsymmetrisch sind, treten für  $p$  und höher Knoten in den Kugelwellen-Funktionen  $Y_l^{m_l}$  auf: Orbitale sind von Kern aus im Raum ausgerichtet → chemische Eigenschaften der Atome, weil chemische Bindungen durch Orbitalüberlappung zwischen benachbarten Atomen zustande kommen. Z. B.  $p$ -Orbitale:



→ Bei Übergängen zwischen Elektronenzuständen ("elektronischen Übergängen") unter Austausch von Photonen muß neben Energieerhaltung auch Drehimpulserhaltung gelten. Photon besitzt Spin:

$$s = 1$$

→ Auswahlregel für Elektronenübergänge:

$$\Delta l = \pm 1 \quad (\text{z.B. } s \leftrightarrow p\text{-Übergänge erlaubt, aber } s \leftrightarrow s \text{ verboten})$$

→ Charakteristische Röntgen-Strahlung: Überführung von Inner-Schalen-Elektron in freie höhere Schale/Kontinuum und Auffüllen des frei gewordenen Platzes durch anderes gebundenes Elektron.

→ Serien von Übergängen:  $L \rightarrow K$ :  $K_\alpha$ -Strahlung,  $M \rightarrow K$ :  $K_\beta$ , etc.

Abschirmung von Kernladung durch innere Elektronen und Balmer-Serienbildung:

$$\rightarrow \nu_{K_\alpha} \sim \frac{3}{4} R_\infty \cdot (Z - 1)^2; \nu_{L_\alpha} \sim \frac{5}{36} R_\infty \cdot (Z - 7.4)^2$$

Moseley-Gesetz

(→ Etablierung der Reihenfolge von Elementen in Periodensystem!)

→ Periodensystem der Elemente:

Sowohl in chemischen als auch in physikalischen Eigenschaften tritt periodische Wiederholung auf. Ursache: Sukzessives Auffüllen von Elektronenschalen bei Elementen mit steigender Ordnungszahl.

Coulomb-Abstoßung zwischen Elektronen und

Abschirmung durch innere Schalen muß berücksichtigt werden

→ Problem nicht analytisch lösbar (→ Vielteilchenproblem!)

Regeln:

- (a) 4 Quantenzahlen bestimmen einen Elektronenzustand eindeutig: Haupt-QZ  $n$ , Neben-QZ  $l$ , Magnet-QZ  $m_l$ , Spin  $s$ .
- (b) Pauli-Prinzip: Jeder Zustand kann von genau einem Teilchen besetzt werden (generell für Spin- $1/2$ -Teilchen ("Fermionen") gültig; dagegen können beliebig viele Spin-1-Teilchen ("Bosonen", z. B. Photonen) einen bestimmten Zustand besetzen).
- (c) Entartung der Orbital-Energien bzgl.  $l$  für Atome  $>$  He aufgehoben. Beispiel: Elektron in  $p$ -Orbital besitzt geringere Aufenthaltswahrscheinlichkeit nahe Kern als in  $s$ -Orbital → Abschirmung wirkt stärker auf  $p$  als auf  $s$  →  $\langle r_p \rangle > \langle r_s \rangle$  →  $E_p > E_s$ .
- (d) Hund'sche Regel: Energie-entartete Orbitale (z.B.  $p_x, p_y, p_z$ ) werden wegen Coulomb-Abstossung zwischen Elektronen zuerst einzeln mit Elektronen gleichen Spins, danach erst mit dem zweiten  $e^-$  besetzt.

→ Chemische Eigenschaften (Bindung zu Nachbaratomen in Molekülen werden durch äußere Elektronen ("Valenzelektronen") bestimmt.

→ Schweratome: Bindungsenergie  $E$  für Innerschalen-Elektronen wird so groß, daß "Bahngeschwindigkeit" nicht gegen  $c$  vernachlässigbar

→ relativistische Massenzunahme → weitere Erhöhung von  $E$ .

→ Extrem hohe Massendichte von Schwermetallen wie Os, Ir, Pt; dichte Bindung des Valenzelektrons in Au → inertes "Edelmetall"

- Einwirkung von Magnetfeld  $\vec{B}$  auf Atomorbitale → Zeeman-Effekt = Aufspaltung der Energieniveaus: Entartung bzgl. Magnet-QZ  $m_l$  wird aufgehoben. Im Spektrum werden neben Zentralfrequenz  $\omega_0$  zwei Satelliten bei  $\omega_0 \pm \omega_L$  beobachtet (normaler Zeeman-Effekt).

$$\Delta E = -\vec{\mu} \vec{B} = \frac{eB}{2m_e} L_z = m_l \hbar \omega_L = m_l \mu_B B$$

( $\omega_L$ : Larmor-Frequenz,  $\mu_B$ : Bohr'sches Magneton)

Transversale Beobachtungsrichtung ( $\vec{R} \perp \vec{B}$ ):  $\omega_0$  ist  $\pi$ -polarisiert,  $\omega_0 \pm \omega_L$  sind  $\sigma$ -polarisiert. Longitudinal:  $\omega_0$  unbeobachtbar,  $\omega_0 \pm \omega_L$  (einander entgegengesetzt) zirkular polarisiert. Größe der Aufspaltung:  $\Delta E \sim 10^{-4} \text{ eV/T}$  ( $\ll k_B T!$ ).

- Berücksichtigung der Spins ( $\uparrow$  und  $\downarrow$ ) führt zu weiterer Aufspaltung von Niveaus: Für große  $\vec{B}$  unterscheiden sich  $\uparrow$  und  $\downarrow$  für gleiches  $m_l$  um

$$\Delta E = 2 |m_s| g_e \frac{eB}{2m_e} \quad (g_e: \text{elektronischer Landéfaktor})$$

Wegen  $m_s = (\pm)^{1/2}$ ,  $g_e \sim 2 \rightarrow m_s \cdot g_e = 1$  kommt es zur (zufälligen) Entartung der neu entstandenen Niveaus. Wegen der Auswahlregeln

$$\Delta l = \pm 1; \quad \Delta m_l = 0, \pm 1; \quad \Delta s = 0$$

kommt es aber im Spektrum trotz des komplexeren Niveauschemas nicht zu neuen Spektrallinien (Paschen-Back-Effekt).

→ Spin-Bahn-Kopplung: relative Bewegung von Elektron und Kern führt zu permanentem intrinsischen  $\vec{B}$ -Feld am Ort von  $e^-$  ("Feinaufspaltung"; analog führt *Kernspin* zur Hyperfeinaufspaltung von Spektren).

Bezeichnung der entstehenden Zustände, z.B. " $2^2P_{3/2}$ ": Haupt-QZ, Multiplizität, Neben-QZ, Drehimpuls (= Bahndrehimpuls + Spin)

Gesamtdrehimpuls

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

wird wie früher quantisiert:

$$|\vec{J}| = \hbar \sqrt{j(j+1)} \quad j = |l-s|, |l-s|+1, \dots, l+s$$

$$J_z = \hbar m_j \quad m_j = -j, -j+1, \dots, j$$

(muß nicht ganzzahlig sein, daher nicht  $m_j = 0, \dots, \pm j!$ )

$\vec{J}$ ,  $\vec{L}$  und  $\vec{S}$  sind i.A. nicht kollinear → komplizierte Beziehung zwischen  $\vec{\mu}_j$  und  $\vec{J}$ :

$$\vec{\mu}_j = -\frac{e}{2m_e} g_j \vec{J} \text{ mit}$$

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1)+s(s+1)-l(l+1)}{2j(j+1)}: \text{ verallgemeinerter Landéfaktor}$$

$$|\vec{\mu}_j| = \mu_B g_j \sqrt{j(j+1)},$$

$$\mu_{j,z} = -\mu_B g_j m_j$$

→ anomaler Zeeman-Effekt (zeigt komplizierte Aufspaltung der Energieniveaus und komplizierte Spektren).

Direkte Methode zur Spektroskopie atomarer Subniveaus:

ESR (*electron spin resonance*)-Spektroskopie bzw.

NMR (*nuclear magnetic resonance*)-Spektroskopie.