2 Theorie der semantischen Typen

2.1 Typen

Eine mögliche Erweiterung von PL1 ist die Prädikatenlogik der 2. Stufe (PL2).

In PL2 kann nicht nur über Individuen, sondern auch über Merkmale von Individuen quantifiziert werden.

Zu den Grundausdrücken gehören also neben Individuen- auch Prädikatsvariablen (der 1. Stufe), die durch die Quantoren gebunden werden können.

Beispiele:

$$\forall P\big[P(Hans') \vee \neg P(Hans')\big]$$
$$\forall P\big[\exists x\big[Mensch'(x) \wedge gut'(x) \wedge P(x)\big] \rightarrow P(Hans')\big]$$

$\boxed{?}$ Gib die natürlichsprachlichen Sätze an, deren semantische Repräsentationen diese Formeln sind.

In PL2 gibt es außerdem Prädikatskonstanten, die von Merkmalen prädiziert werden können.

Beispiel:

$$Farbe'(rot')$$

Aber auch PL2 ist nicht ausdrucksstark genug, um die semantischen Strukturen der natürlichen Sprache erfassen zu können.

Prädikatenlogiken einer beliebigen Stufe haben unter anderem den Nachteil, dass keine Prädikatsmodifikatoren vorgesehen sind.

Die **Typenlogik** geht noch einen Schritt weiter:

Sie ist eine Erweiterung von PL1, die beliebig viele verschiedene Ausdruckstypen, d.h. eine unendliche Menge von Kategorien von Ausdrücken enthält.

In der Typenlogik werden die Ausdrücke – ähnlich zur Einteilung von natürlichsprachlichen Ausdrücken in syntaktische Kategorien N, NP, V, VP, A, AP etc. – so in Typen eingeteilt, dass

- der Typ eines Ausdrucks zu erkennen gibt, mit Ausdrücken welchen Typs er sich verbinden kann und welchen Typ der daraus resultierende komplexe Ausdruck hat, und

- die Zuordnung von Denotationen zu den Ausdrücken parallel zu ihrer Typeneinteilung erfolgt.

Die (syntaktischen) Typen der logiksprachlichen Ausdrücke können als **semantische Typen** jener natürlichsprachlichen Ausdrücke betrachtet werden, deren Bedeutung sie repräsentieren.

Die Typenlogik gründet sich auf die mathematische Theorie einfacher Typen von Bertrand Russell (*Principia mathematica*, 1910-1913).

Ihre Entwicklung diente dazu, die nach ihm benannte Paradoxie in der naiven Mengenlehre zu vermeiden.

Basistypen

Bei der Typeneinteilung von Ausdrücken wird von folgenden **Basistypen** ausgegangen:

- ***e*** (als Abkürzung für *entity*)
- ***t*** (als Abkürzung für *truth value*)

Für die nicht-logischen Grundausdrücke und für die Formeln von PL1 ergeben sich damit folgende Typzuweisungen:

e ist der Typ eines **Individuenterms** (einer Individuenkonstanten oder -variablen), d.h. eines Ausdrucks, dessen mögliche Denotationen Individuen (oder Entitäten) sind.

t ist der Typ einer **Formel**, d.h. eines Ausdrucks, dessen mögliche Denotationen Wahrheitswerte sind.

Beispiel:

$$\underbrace{bewundern'(\underset{e}{Hans'},\underset{e}{Maria'})}_{t}$$

Die möglichen Denotationen von Prädikaten (Prädikatsvariablen oder -konstanten) sind weder Entitäten noch Wahrheitswerte.

Was sind die Typen von Prädikaten?

Die Prädikatstypen sollen anzeigen, mit wie vielen Ausdrücken welchen Typs die Prädikate sich verbinden müssen, um einen Ausdruck vom Typ t zu ergeben.

Für Prädikate werden also komplexere Typen benötigt.

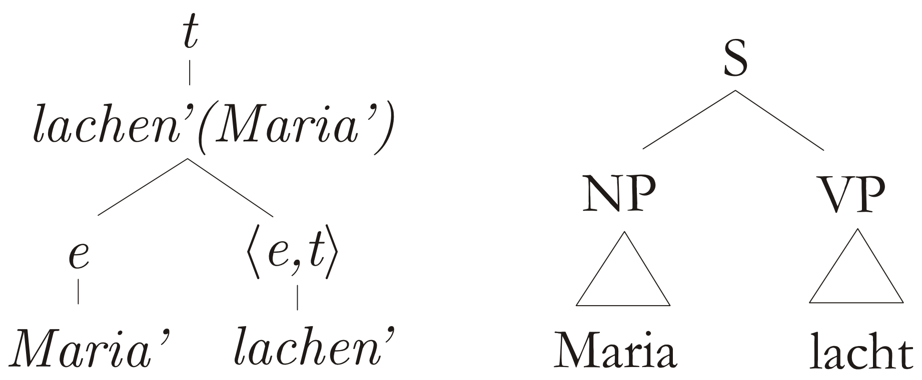
1-stellige Prädikate der 1. Stufe

$\langle e,t \rangle$ ist der Typ eines 1-stelligen Prädikats der 1. Stufe, d.h. eines Ausdrucks, der angewandt auf einen Ausdruck vom Typ e einen Ausdruck vom Typ t ergibt:

$\langle e,t \rangle + e \;=\; t$ (einmalige Typ-‚Kürzung')

Ein Ausdruck vom Typ $\langle e,t \rangle$ kann damit als eine Funktion $e \to t$ von Ausdrücken vom Typ e in Ausdrücke vom Typ t angesehen werden.

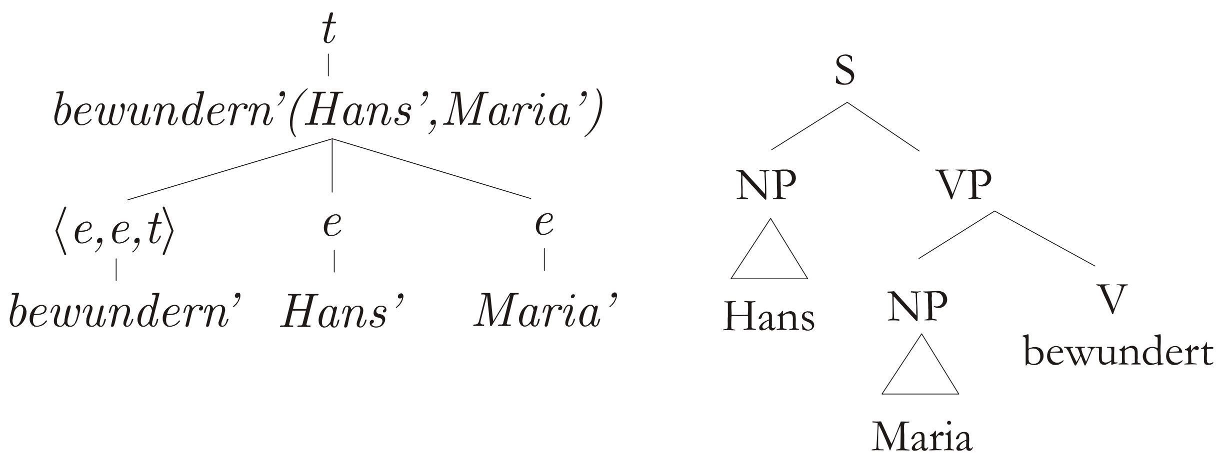
Beispiel:



2-stellige Prädikate der 1. Stufe

<u>Hypothese:</u> $\langle e,e,t\rangle$ ist der Typ eines 2-stelligen Prädikats der 1. Stufe.

<u>Beispiel:</u>



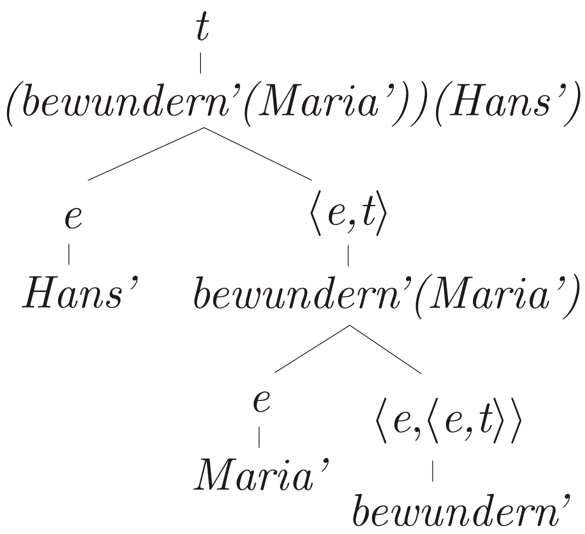
Problem: Die Struktur der semantischen Repräsentation des natürlichsprachlichen Satzes ist nicht parallel zu seiner syntaktischen Struktur.

Alternative:

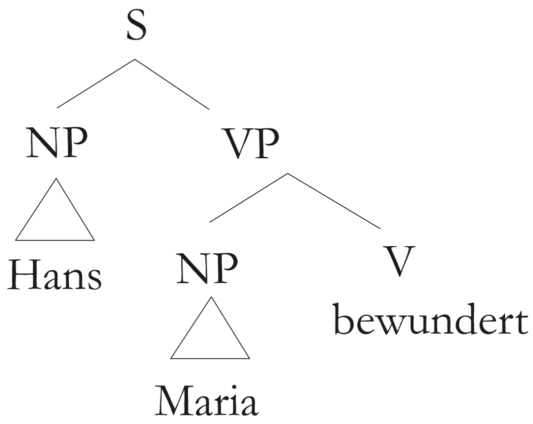
$\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$ ist der Typ eines 2-stelligen Prädikats der 1. Stufe, d.h. eines Ausdrucks, der angewandt auf einen Ausdruck vom Typ e zunächst einen Ausdruck vom Typ $\langle e,t\rangle$ und danach angewandt auf einen weiteren Ausdruck vom Typ e einen Ausdruck vom Typ t ergibt:

$\big(\langle e,\langle e,t\rangle\rangle + e\big) + e \;=\; \langle e,t\rangle + e \;=\; t$ (zweimalige Typ-‚Kürzung')

<u>Beispiel:</u>



t
(bewundern'(Maria'))(Hans')
e
⟨e,t⟩
Hans'
bewundern'(Maria')
e
⟨e,⟨e,t⟩⟩
Maria'
bewundern'



S
NP
VP
Hans
NP
V
bewundert
Maria

Im Weiteren wird generell eine zur syntaktischen Struktur parallele binäre Struktur der semantischen Repräsentation von natürlichsprachlichen Ausdrücken vorausgesetzt.

Das führt zu einer neuen Darstellungsweise von PL1-Formeln mit mehrstelligen Prädikaten.

Notation:

$$(\ldots(\pi^n(\tau_n))\ldots(\tau_1),$$

oder einfacher,

$$\pi^n(\tau_n)\ldots(\tau_1),$$

statt bisher

$$\pi^n(\tau_1,\ldots,\tau_n)$$

Die neue, funktionale Darstellung (auch: Schönfinkel-Darstellung oder ‚Schönfinkelisierung', nach Moses Schönfinkel, 1889-1942) ist nur eine Notationsvariante der bisherigen, relationalen Darstellung.

Beispiel:

$(bewundern'(Maria'))(Hans')$,

oder einfacher,
$bewundern'(Maria')(Hans')$,

statt bisher
$bewundern'(Hans', Maria')$

3-stellige Prädikate der 1. Stufe

$\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$ ist der Typ eines 3-stelligen Prädikats der 1.Stufe, d.h. eines Ausdrucks, der angewandt auf einen Ausdruck vom Typ e zunächst einen Ausdruck vom Typ $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$, dann angewandt auf einen weiteren Ausdruck vom Typ e einen Ausdruck vom Typ $\langle e,t\rangle$ und schließlich angewandt auf einen dritten Ausdruck vom Typ e einen Ausdruck vom Typ t ergibt:

$$\Big(\big(\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle+e\big)+e\Big)+e \;=\; \big(\langle e,\langle e,t\rangle\rangle+e\big)+e \;=\; \langle e,t\rangle+e \;=\; t$$

(dreimalige Typ-‚Kürzung')

Beispiel:

- t
  - $((geben'(das\_Buch'))(Maria'))(Hans')$
    - e
      - $Hans'$
    - $\langle e,t \rangle$
      - $(geben'(das\_Buch'))(Maria')$
        - e
          - $Maria'$
        - $\langle e,\langle e,t \rangle\rangle$
          - $geben'(das\_Buch')$
            - e
              - das_Buch'
            - $\langle e,\langle e,\langle e,t \rangle\rangle\rangle$
              - $geben'$

Die funktionale Darstellung der konstruierten Formel in (i) bzw. (ii) ist wieder äquivalent zu ihrer relationalen Darstellung in (iii).

(i) $((geben'(das\_Buch'))(Maria'))(Hans')$

(ii) $= geben'(das\_Buch')(Maria')(Hans')$

(iii) $= geben'(Hans', Maria', das\_Buch')$

Allgemein kann ein Ausdruck vom Typ $\langle a,b \rangle$ als eine Funktion $a \rightarrow b$ von Ausdrücken vom Typ a in Ausdrücke vom Typ b angesehen werden, d.h. $\langle a,b \rangle(a) = b$.

Die Kombination einer Funktion mit einem Argument des passenden Typs geschieht über die Operation der funktionalen Applikation.

Regel der funktionalen Applikation (FA)

Wenn α ein Ausdruck vom Typ $\langle a,b \rangle$ und β ein Ausdruck vom Typ a ist, dann ist $\alpha(\beta)$ ein Ausdruck vom Typ b.

Im Beispiel mit *geben'* wird FA also dreimal angewandt.

Modelltheoretische Grundlagen

Die Typeneinteilung der Ausdrücke und ihre funktionale Kombinatorik korrespondieren zu entsprechenden Verhältnissen im Bereich der modelltheoretischen Interpretation.

Diese Korrespondenz lässt sich explizit darstellen.

Die Denotationen von Prädikaten werden nun nicht mehr als Mengen von Individuen oder von Tupeln von Individuen aufgefasst, sondern als Funktionen einer jeweils passenden Art.

Eine Interpretation in der Funktionsnotation führt dabei aber letztlich zum selben Ergebnis wie die in der bisherigen Mengennotation.

Allgemein werden Prädikate als Funktionsausdrücke, jene Ausdrücke, auf die sie jeweils angewandt werden, als Argumentausdrücke betrachtet.

Für 1-stellige Prädikate der 1. Stufe, d.h. Ausdrücke vom Typ $\langle e,t \rangle$ wird statt einer Menge von Individuen die charakteristische Funktion dieser Menge als Denotation gewählt.

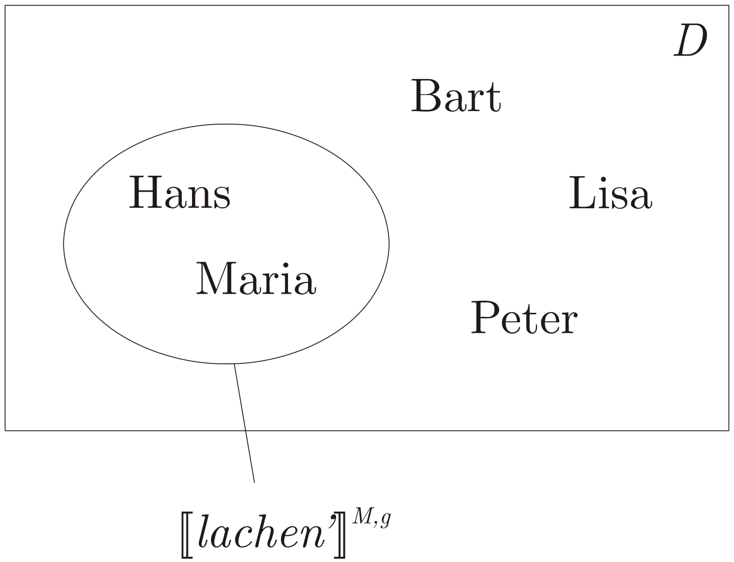
$\boxed{?}$ Was ist die charakteristische Funktion einer Menge?

Ein Ausdruck vom Typ $\langle e,t \rangle$ bezeichnet eine Funktion von der Diskursdomäne D in die Menge der Wahrheitswerte $\{0,1\}$.

Die Mengen- und die Funktionsnotation der Denotationen von Prädikaten sind äquivalent.

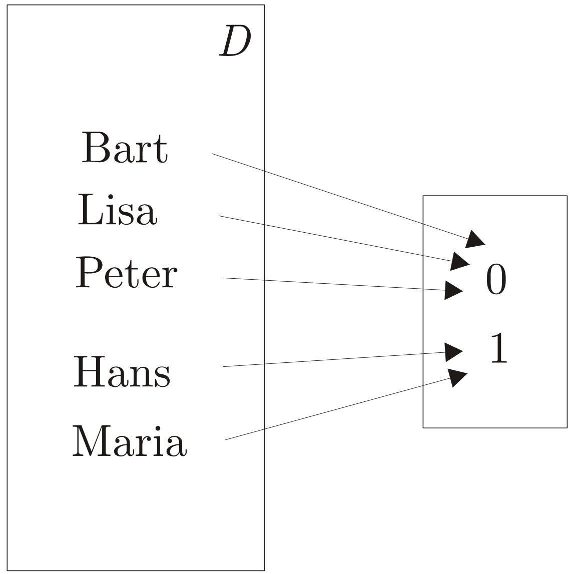
<u>Beispiel:</u>

Denotation von *lachen'* in <u>Mengennotation</u>:



Denotation von *lachen'* in Funktionsnotation:

$[\![lachen']\!]^{M,g}$:



2.2 Typenlogik (TL)

2.2.1 Syntax von TL

Menge der Typen

Neben den beiden Basistypen enthält TL eine unendliche Menge von abgeleiteten, funktionalen Typen, die jeweils die Form eines geordneten Paares haben.

D2.1 **Typen von TL**

(1) e ist ein Typ.

(2) t ist ein Typ.

(3) Wenn a und b Typen sind, dann ist auch $\langle a,b \rangle$ ein Typ.

(4) Nichts sonst ist ein Typ von TL.

$\boxed{?}$ Welche der folgenden Kombinationen sind Typen, welche nicht?

$\langle t,t \rangle$, $\langle e,e,t \rangle$, $\langle t,\langle e,t \rangle\rangle$, $\langle\langle e,e \rangle,\langle e,t \rangle\rangle$

Beispiele:

(a) $\langle e,t\rangle$, $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$, $\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$, $\langle t,t\rangle$, $\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$, $\langle e,e\rangle$, $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$, ...

(b) $\langle\langle e,t\rangle,\langle\langle e,\langle e,t\rangle\rangle,\langle\langle e,e\rangle,t\rangle\rangle\rangle$, $\langle t,\langle\langle t,\langle e,e\rangle\rangle,\langle\langle\langle e,t\rangle,e\rangle,\langle e,t\rangle\rangle\rangle\rangle$, ...

$\boxed{?}$ Für welche Ausdrücke stehen die angegebenen Typen?

Typen wie die unter (a) sind solche, die tatsächlich für die semantische Analyse der natürlichen Sprache gebraucht werden.

Jeder der funktionalen Typen besteht aus zwei Komponenten, die ihrerseits wieder komplex sein können.

Dadurch ergibt sich generell eine binäre Hierarchie der semantischen Repräsentationen, die der binären Hierarchie der Syntax natürlichsprachlicher Ausdrücke entspricht.

Grundausdrücke

Die Menge der nicht-logischen Grundausdrücke von PL1 wird um Variablen und Konstanten jeden Typs erweitert.

Das Vokabular von TL enthält:

(1) für jeden Typ a eine unendliche Menge VAR_a von Variablen des Typs a

allgemein:

Variablen des Typs a $v_{n,a}$ $(n \geq 1)$

speziell:

Variablen des Typs e (IV):	$x, y, z, x_1, \ldots$
Variablen des Typs $\langle e,t \rangle$: (1-stellige PV der 1. Stufe)	$P^1, Q^1, R^1, P_1^1, \ldots$
Variablen des Typs $\langle e,\langle e,t \rangle\rangle$: (2-stellige PV der 1. Stufe)	$P^2, Q^2, R^2, P_1^2, \ldots$
Variablen des Typs $\langle e,\langle e,\langle e,t \rangle\rangle\rangle$: (3-stellige PV der 1. Stufe)	$P^3, Q^3, R^3, P_1^3, \ldots$
Variablen des Typs $\langle\langle e,t \rangle,t \rangle$: (1-stellige PV der 2. Stufe)	$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \mathcal{P}_1, \ldots$

(2) für jeden Typen a eine unendliche Menge CON_a von Konstanten des Typs a

allgemein:

Konst. des Typs a	$c_{n,a}$ $(n \geq 1)$

speziell:

Konst. des Typs e (IK):	$Hans', Leipzig', \ldots$
Konst. des Typs $\langle e,t\rangle$: (1-stellige PK der 1. Stufe)	$lachen', Frau', \ldots,$ $rot', unten', \ldots$
Konst. des Typs $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$: (2-stellige PK der 1. Stufe)	$essen', Freundin', \ldots,$ $größer', \ldots, auf', \ldots$
Konst. des Typs $\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$: (3-stellige PK der 1. Stufe)	$geben', zwischen', \ldots$
Konst. des Typs $\langle\langle e,t\rangle,t\rangle$: (1-stellige PK der 2. Stufe)	$Farbe', \ldots$

(3) Konnektoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(4) Quantoren: $\forall, \exists$

(5) Identitätssymbol: $=$

(6) technische Hilfszeichen: $(,), [,]$

Syntaktische Regeln

Im Unterschied zu PL1 wird in TL allgemein definiert, was ein wohlgeformter Ausdruck (abgekürzt: wfA) eines bestimmten Typs ist.

D2.2 **Wohlgeformte Ausdrücke von TL**

(1) Wenn α eine Variable oder Konstante vom Typ a ist, dann ist α ein wfA vom Typ a.

(2) Wenn α ein wfA vom Typ $\langle a,b \rangle$ ist und β ein wfA vom Typ a, dann ist $\alpha(\beta)$ ein wfA vom Typ b (Regel der funktionalen Applikation FA).

(3) Wenn ϕ und ψ wfAe vom Typ t sind, dann sind $\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi)$ und $(\phi \leftrightarrow \psi)$ wfAe vom Typ t.

(4) Wenn α und β wfAe desselben beliebigen Typs sind, dann ist $(\alpha = \beta)$ ein wfA vom Typ t.

(5) Wenn ϕ ein wfA vom Typ t ist und v eine Variable beliebigen Typs ist, dann sind $\forall v[\phi]$ und $\exists v[\phi]$ wfAe vom Typ t.

Die Menge der Formeln, d.h. der wohlgeformten Ausdrücke vom Typ t, wird damit gegenüber PL1 wesentlich erweitert.

Beispiele:

(a) $Farbe'(rot')$

(b) $\forall P^2 \exists x[P^2(x)(Maria') \vee P^2(x)(Hans')]$

(c) $\forall P^1[(P^1(c_{1,e}) \leftrightarrow P^1(c_{2,e})) \rightarrow (c_{1,e} = c_{2,e})]$

(d) $\exists \mathcal{P}[\mathcal{P}(rot') \wedge \mathcal{P}(grün')]$

(e) $\exists v_{7,e} P^2(v_{7,e})(c_{4,e})$

$\boxed{?}$ Gib die Typen der in den Formeln vorkommenenden wohlgeformten Ausdrücke an.

Außerdem werden unendlich viele verschiedene wohlgeformte Ausdrücke zugelassen, die keine Formeln sind.

Beispiele:

$$Hans', \; lieben'(Maria'), \; zeigen'(Leipzig'), \ldots$$

$\boxed{?}$ Gib die Typen dieser wohlgeformten Ausdrücke an.

$\boxed{?}$ Angenommen, x ist vom Typ e, Q ist vom Typ $\langle e,t \rangle$ und $\mathcal{R}$ ist vom Typ $\langle\langle e,t \rangle,t \rangle$.

Welche der folgenden Ausdrücke sind wohlgeformt, und falls ja, von welchem Typ sind sie?

(a) $Q(x)$

(b) $\mathcal{R}(x)$

(c) $\mathcal{R}(Q)$

(d) $\mathcal{R}(Q(x))$

(e) $(\mathcal{R}(Q))(x)$

Übungen

Ü2.1 – Ü2.2

Termin: **nächstes Tutorium**