2.2.2 Semantik von TL

Menge der Domänen

Zu jedem Typ gibt es eine Menge von möglichen Denotationen der Ausdrücke dieses Typs.

Diese Menge wird Domäne des betreffenden Typs genannt.

Notationen:

(1) D_a: die Domäne des Typs a, d.h. die Menge der möglichen Denotationen von Ausdrücken des Typs a

(2) $D_b^{D_a}$: die Menge der Funktionen von D_a in D_b, d.h. die Menge der Funktionen von der Domäne des Typs a in die Domäne des Typs b

Beachte: $(D_a^{D_b})^{D_c} \neq D_a^{(D_b^{D_c})}$

Parallel zur Definition der Typen (**D2.1**) werden die Domänen der erzeugten Typen definiert.

D2.3 Domänen der Typen von TL

(1) $D_e = D$, d.h. die Diskursdomäne (des jeweiligen Modells M).
(2) $D_t = \{0,1\}$.
(3) Für beliebige Typen a und b gilt: $D_{\langle a,b \rangle} = {D_b}^{D_a}$.
(4) Nichts sonst ist Domäne eines Typs von TL.

Die Domäne des Typs e ist also die Menge der Individuen (eines Modell M);

die Domäne des Typs t ist die Menge der Wahrheitswerte $\{0,1\}$;

die Domäne eines beliebigen Typs $\langle a,b \rangle$ ist die Menge der Funktionen von der Domäne D_a in die Domäne D_b.

$$D_b^{D_a}: \boxed{D_a} \longrightarrow \boxed{D_b}$$

Eine mögliche Denotation eines Ausdrucks vom Typ $\langle a,b \rangle$ ist damit ein Element der Menge der Funktionen $D_b^{D_a}$,
d.h. eine Funktion von der Menge der möglichen Denotationen von Ausdrücken vom Typ a in die Menge der möglichen Denotationen von Ausdrücken vom Typ b.

Beispiele:

$$D_{\langle e,t\rangle} = {D_t}^{D_e} = \{0,1\}^D$$

$$D_{\langle e,\langle e,t\rangle\rangle} = {D_{\langle e,t\rangle}}^{D_e} = ({D_t}^{D_e})^{D_e} = (\{0,1\}^D)^D$$

$$D_{\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle} = {D_{\langle e,\langle e,t\rangle\rangle}}^{D_e} = ({D_{\langle e,t\rangle}}^{D_e})^{D_e} = (({D_t}^{D_e})^{D_e})^{D_e} = ((\{0,1\}^D)^D)^D$$

$\boxed{?}$ Um welche Mengen von Funktionen handelt es sich bei den angegebenen Domänen?

Modell und Variablenbelegung

D2.4 Ein **Modell** M für eine typenlogische Sprache L ist ein geordnetes Paar $\langle D, I \rangle$, wobei D die Diskursdomäne von M und I die Interpretationsfunktion von M ist, die jeder nicht-logischen Konstanten vom Typ a eine Denotation aus D_a von M zuweist.

D2.5 Eine **Variablenbelegung** g für eine typenlogische Sprache L ist eine Funktion, die jeder Variablen vom Typ a eine Denotation aus D_a von M zuweist.

Semantische Regeln

D2.6 Denotation eines wohlgeformten Ausdrucks von TL bzgl. *M* und *g*

(1) Wenn α eine Konstante vom Typ a ist, dann $[\![\alpha]\!]^{M,g} = I(\alpha)$.
Wenn α eine Variable vom Typ a ist, dann $[\![\alpha]\!]^{M,g} = g(\alpha)$.

(2) Wenn α ein wfA vom Typ $\langle a,b\rangle$ und β ein wfA vom Typ a ist, dann $[\![\alpha(\beta)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta]\!]^{M,g})$.

(3) Wenn α und β wfAe vom Typ t sind, dann
$[\![\neg\phi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 0$,
$[\![\phi \wedge \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = [\![\psi]\!]^{M,g} = 1$,
$[\![\phi \vee \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 1$ oder $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$,
$[\![\phi \rightarrow \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = 0$ oder $[\![\psi]\!]^{M,g} = 1$,
$[\![\phi \leftrightarrow \psi]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\phi]\!]^{M,g} = [\![\psi]\!]^{M,g}$.

(4) Wenn α und β wfAe vom Typ a sind, dann $[\![\alpha = \beta]\!]^{M,g} = 1$ gdw $[\![\alpha]\!]^{M,g} = [\![\beta]\!]^{M,g}$.

(5) Wenn ϕ ein wfA vom Typ t und v eine Variable vom Typ a ist, dann
$[\![\forall v[\phi]]\!]^{M,g} = 1$ gdw für jedes $d \in D_a$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,g[v \rightarrow d]} = 1$,
$[\![\exists v[\phi]]\!]^{M,g} = 1$ gdw für mindestens ein $d \in D_a$ gilt: $[\![\phi]\!]^{M,g[v \rightarrow d]} = 1$.

2.3 Anwendungen von TL

L sei eine typenlogische Sprache, die u.a. die Grundausdrücke $Bart'$, $Lisa'$, und $Maria'$ als semantische Repräsentationen der Eigennamen *Bart*, *Lisa* bzw. *Maria* enthält.

M sei ein passendes Modell für L mit der Diskursdomäne

$D = \{\text{Bart}, \text{Lisa}, \text{Maria}\}$,

wobei für $Bart'$, $Lisa'$, und $Maria'$ die folgenden Denotationen angenommen werden:

$[\![Bart']\!]^{M,g} = \text{Bart}$,

$[\![Lisa']\!]^{M,g} = \text{Lisa}$,

$[\![Maria']\!]^{M,g} = \text{Maria}$.

2.3.1 Verbale und nominale Prädikate

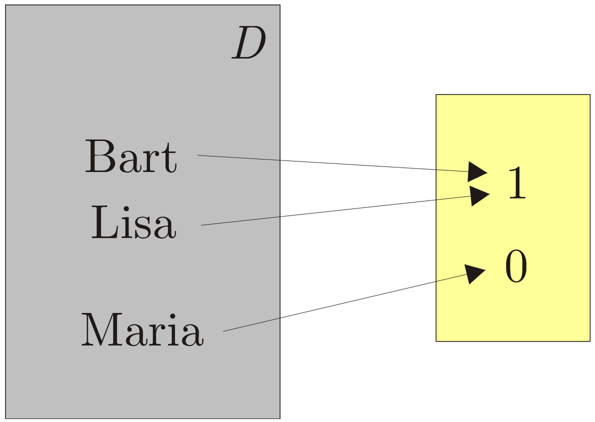
Intransitive Verben wie *laufen* und **absolute Nomen** wie *Frau* sind Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle e, t\rangle$, d.h. 1-stellige Prädikate der 1. Stufe.

$$\langle e,t\rangle : e \rightarrow t \qquad \text{(d.h.: } \langle e,t\rangle(e) \;=\; t\text{)}$$

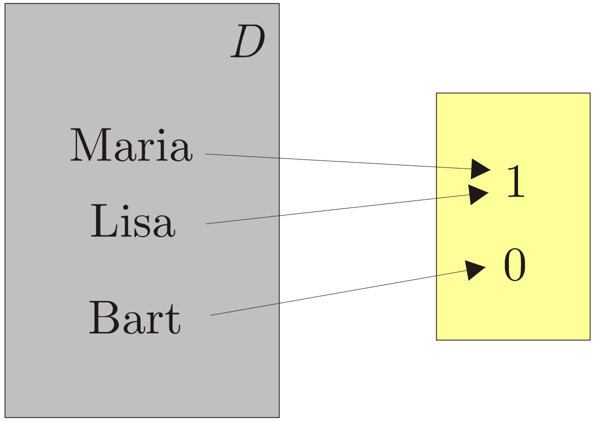
$$D_{\langle e,t\rangle} = D_t^{\,D_e} : \quad \boxed{D_e} \longrightarrow \boxed{D_t}$$

Für die L-Grundausdrücke *laufen*' und *Frau*', d.h. die semantischen Repräsentationen von *laufen* bzw. *Frau* seien in M die folgenden Denotationen in Funktionsnotation angenommen:

$[\![laufen']\!]^{M,g}$:



$[\![Frau']\!]^{M,g}$:



$\boxed{?}$ Gib die Denotationen entsprechend in Mengennotation an.

Auf Grund von **D2.6** (2) gilt:

Wenn α ein wfA vom Typ $\langle e,t \rangle$ und β ein wfA vom Typ e ist,
dann $[\![\alpha(\beta)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta]\!]^{M,g})$,
wobei $[\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta]\!]^{M,g})$ ein wfA vom Typ t, d.h. eine Formel ist.

$\boxed{?}$ Bestimme die folgenden Denotationen:

(i) $[\![laufen'(Bart')]\!]^{M,g} =$

(ii) $[\![Frau'(Lisa')]\!]^{M,g} =$

$\boxed{?}$ Gib die natürlichsprachlichen Sätze an, deren semantische Repräsentationen die wfAe $laufen'(Bart')$ und $Frau'(Lisa')$ sind.

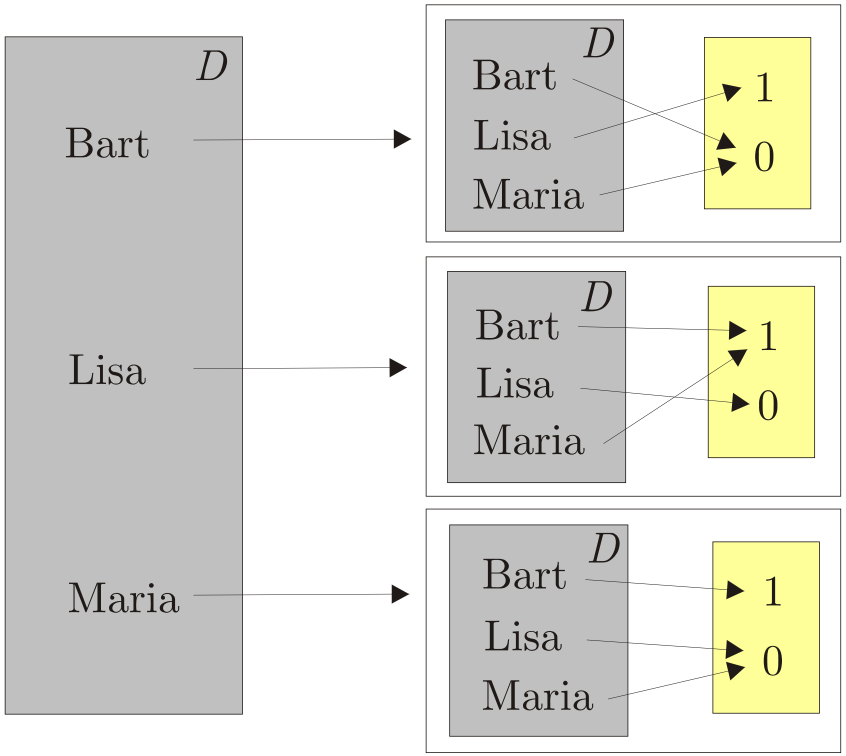
Transitive Verben wie *besuchen* und **relationale Nomen** wie *Freundin* sind Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$, d.h. <u>2-stellige Prädikate der 1. Stufe</u>.

$$\langle e,\langle e,t\rangle\rangle : e \longrightarrow (e \longrightarrow t))$$

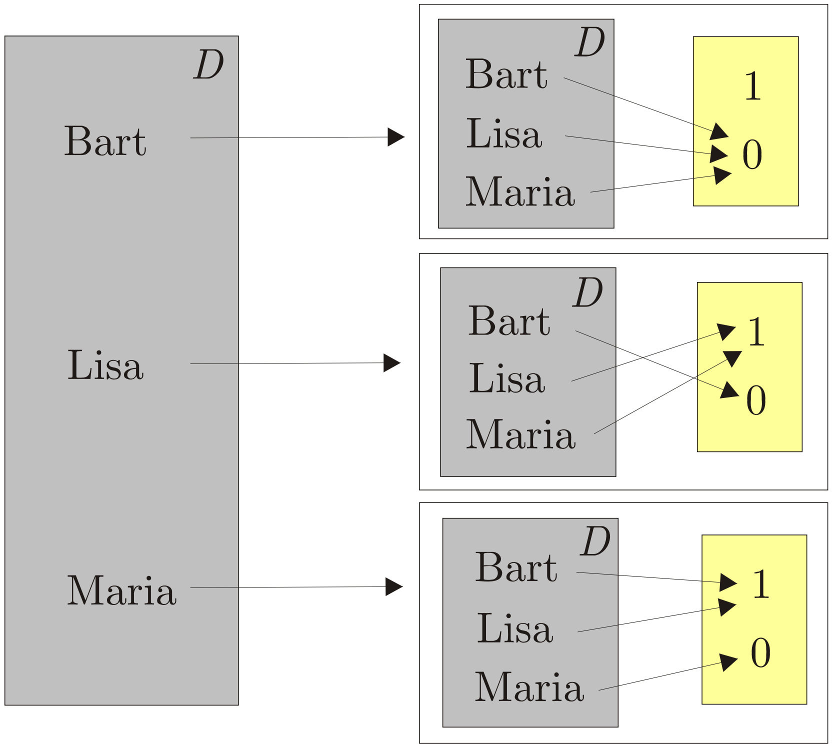
$$D_{\langle e,\langle e,t\rangle\rangle} = (D_t{}^{D_e})^{D_e} : \quad \boxed{D_e} \longrightarrow \boxed{\boxed{D_e} \longrightarrow \boxed{D_t}}$$

Für die L- Grundausdrücke $besuchen'$ und $Freundin'$ seien in M die folgenden Denotationen angenommen:

$[\![besuchen']\!]^{M,g}$:



$[\![\mathit{Freundin'}]\!]^{M,g}$:



? Gib die Denotationen entsprechend in Mengennotation an.

Auf Grund von **D2.6** (2) gilt:

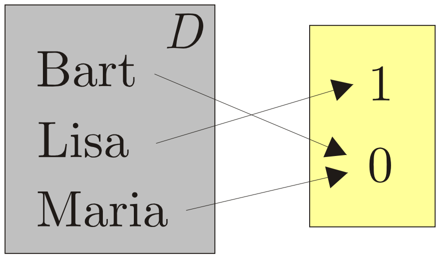
Wenn α ein wfA vom Typ $\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$ und β_2 ein wfA vom Typ e ist,

dann $[\![\alpha(\beta_2)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta_2]\!]^{M,g})$,

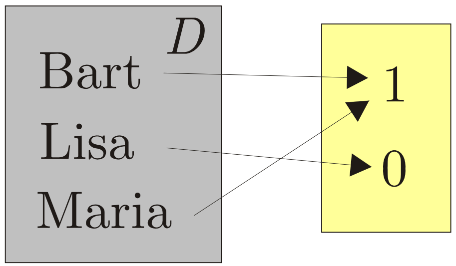
wobei $[\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta_2]\!]^{M,g})$ ein wfA vom Typ $\langle e,t\rangle$ ist.

Damit ergeben sich die folgenden Denotationen für die 1-stelligen Prädikate $besuchen'(Bart')$, $besuchen'(Lisa')$ und $besuchen'(Maria')$:

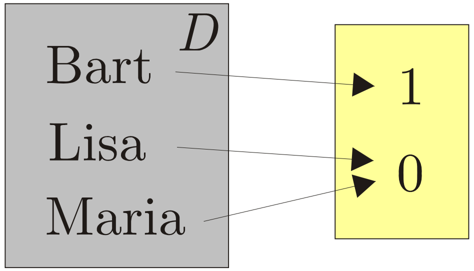
$$[\![besuchen'(Bart')]\!]^{M,g} = [\![besuchen']\!]^{M,g}([\![Bart']\!]^{M,g}) =$$



$$[\![besuchen'(Lisa')]\!]^{M,g} = [\![besuchen']\!]^{M,g}([\![Lisa']\!]^{M,g}) =$$



$$[\![besuchen'(Maria')]\!]^{M,g} = [\![besuchen']\!]^{M,g}([\![Maria']\!]^{M,g}) =$$



$\boxed{?}$ Welche natürlichsprachlichen Ausdrücke werden durch die wfAe $besuchen'(Bart')$, $besuchen'(Lisa')$ und $besuchen'(Maria')$ semantisch repräsentiert?

Auf Grund von **D2.6** (2) gilt außerdem:

Wenn $\alpha(\beta_2)$ ein wfA vom Typ $\langle e,t\rangle$ und β_1 ein wfA vom Typ e ist,

dann $[\![\alpha(\beta_2)(\beta_1)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta_2]\!]^{M,g})([\![\beta_1]\!]^{M,g})$,

wobei $[\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta_2]\!]^{M,g})([\![\beta_1]\!]^{M,g})$ ein wfA vom Typ t ist.

$\boxed{?}$ Bestimme die folgenden Denotationen:

$$[\![besuchen'(Bart')(Lisa')]\!]^{M,g} = [\![besuchen']\!]^{M,g}([\![Bart']\!]^{M,g})([\![Lisa']\!]^{M,g}) =$$

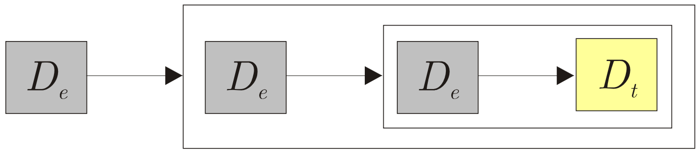
$$[\![Freundin'(Lisa')(Maria')]\!]^{M,g} =$$

$\boxed{?}$ Welcher natürlichsprachliche Satz wird durch die wfA $Freundin'(Lisa')(Maria')$ semantisch repräsentiert?

Ditransitive Verben wie *vorstellen* sind Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$, d.h. 3-stellige Prädikate der 1. Stufe.

$$\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle : e \rightarrow (e \rightarrow (e \rightarrow t)))$$

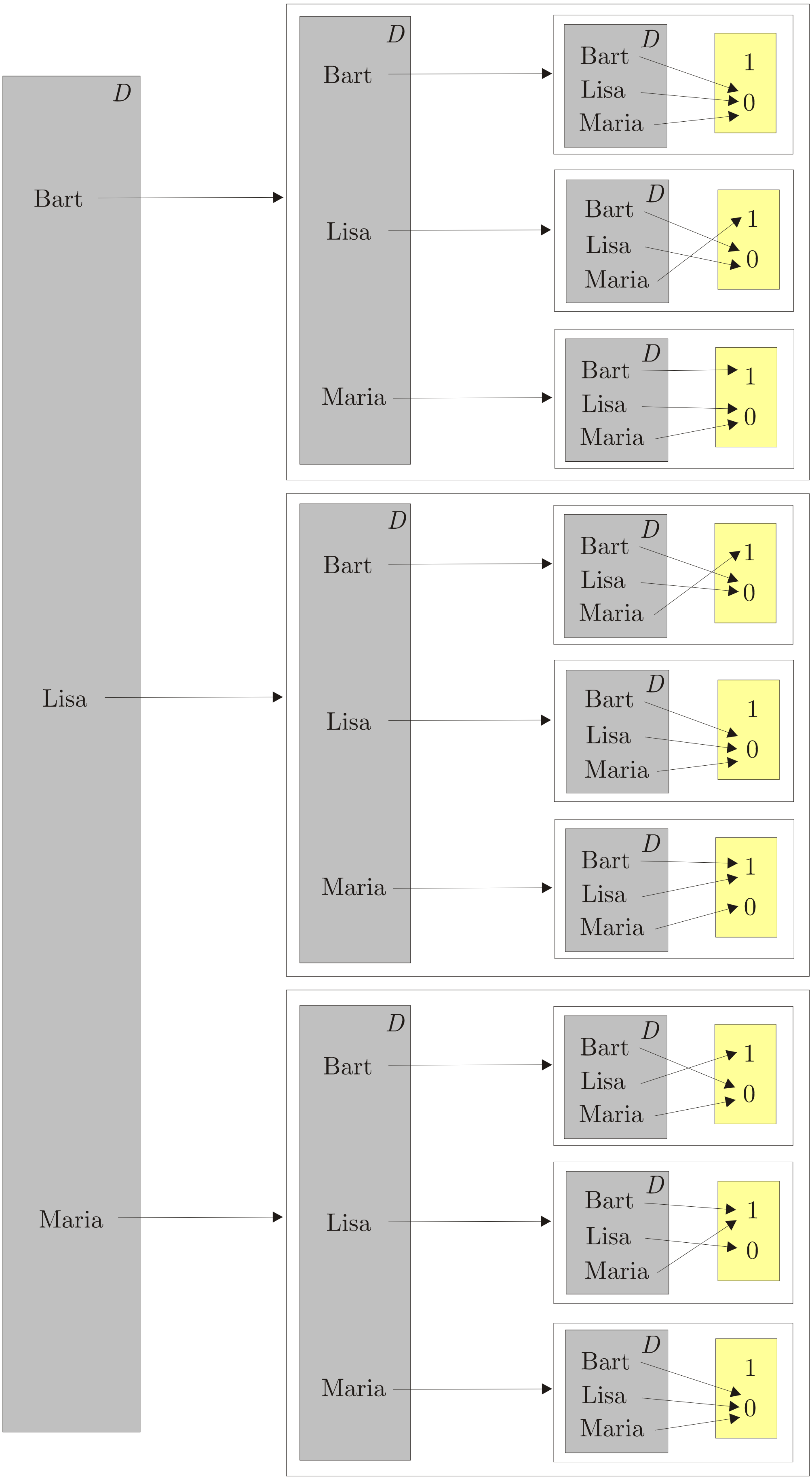
$$D_{\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle} = ((D_t^{D_e})^{D_e})^{D_e} :$$



Für den L-Grundausdruck $vorstellen$' sei in M die Denotation auf der folgenden Seite angenommen

$\boxed{?}$ Gib die Denotation in Mengennotation an.

$[\![vorstellen']\!]^{M,g} =$



Auf Grund dreimaliger Anwendung von **D2.6** (2) gilt:

$$[\![\alpha(\beta_3)(\beta_2)(\beta_1)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta_3]\!]^{M,g})([\![\beta_2]\!]^{M,g})([\![\beta_1]\!]^{M,g}).$$

$\boxed{?}$ Bestimme die folgenden Denotationen:

(i) $[\![vorstellen'(Bart')(Lisa')(Maria')]\!]^{M,g} =$

(ii) $[\![vorstellen'(Lisa')(Lisa')(Bart')]\!]^{M,g} =$

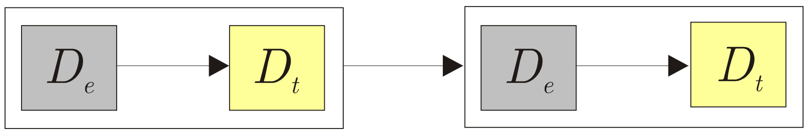
$\boxed{?}$ Wer stellt dabei jeweils wem wen vor?

2.3.2 Adverbiale Modifikatoren

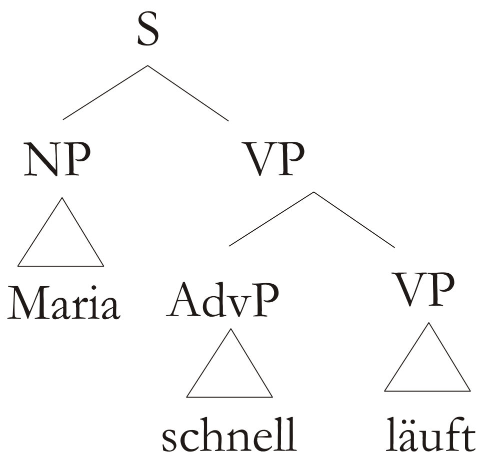
Adverbien wie *schnell* oder *laut* sind Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$, d.h. Modifikatoren von 1-stelligen Prädikaten der 1. Stufe.

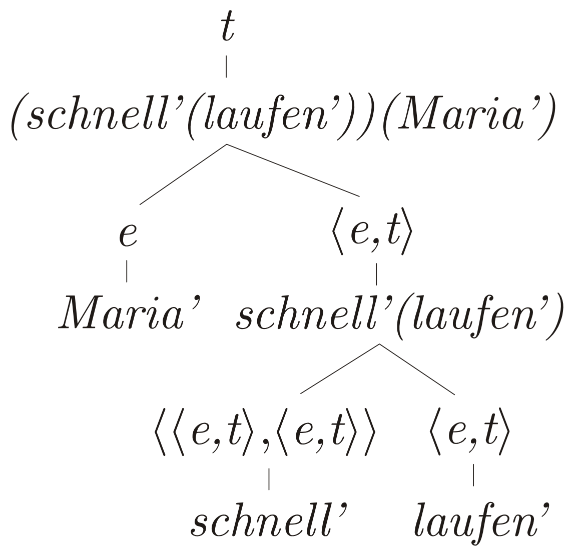
$$\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle : (e \rightarrow t) \rightarrow (e \rightarrow t)$$

$$D_{\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle} = {D_{\langle e,t\rangle}}^{D_{\langle e,t\rangle}} = ({D_t}^{D_e})^{({D_t}^{D_e})} :$$



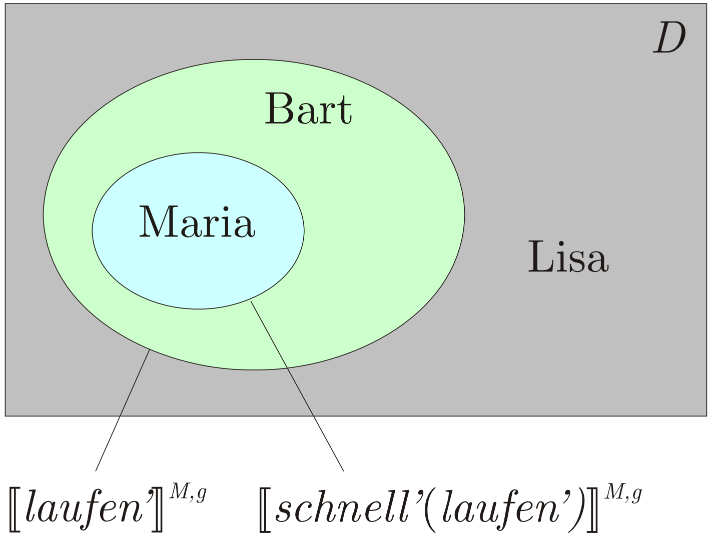
<u>Beispiel:</u> *Maria läuft schnell.*





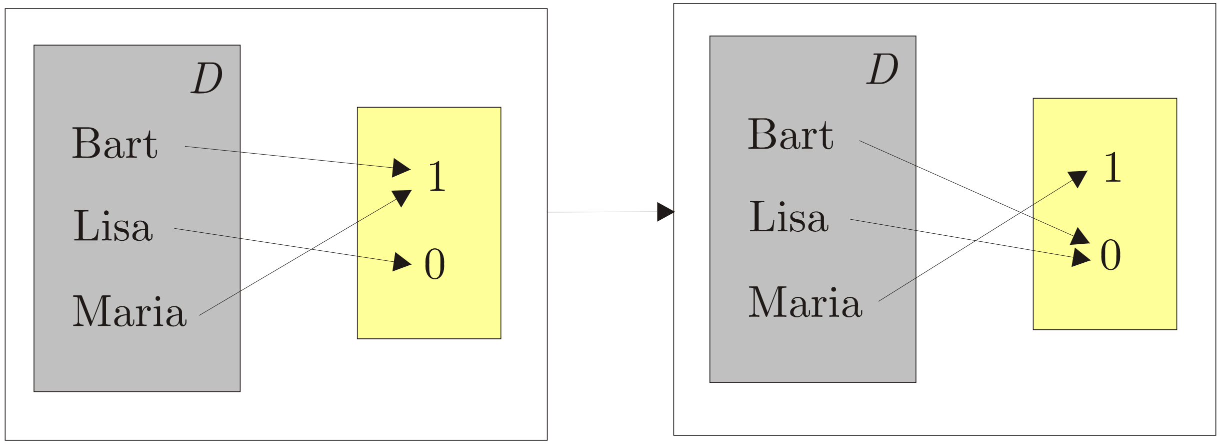
Die Bedeutung des Adverbs *schnell* modifiziert die Bedeutung von *laufen*, indem die Art und Weise des Laufens spezifiziert wird.

Für den L-Grundausdruck *schnell'* sei in M eine Denotation angenommen, die die folgende Denotation von *schnell'*(*laufen'*) in Mengennotation ergibt:



Während also *laufen'* die Menge der laufenden Individuen denotiert, ist die Denotation von *schnell'*(*laufen'*) eine Teilmenge dieser Menge, nämlich die Menge der schnell laufenden Individuen.

In Funktionsnotation ist $[\![schnell']\!]^{M,g}$ eine Funktion, die unter anderem die folgende Zuordnung beinhaltet:



Auf Grund von **D2.6** (2) gilt:

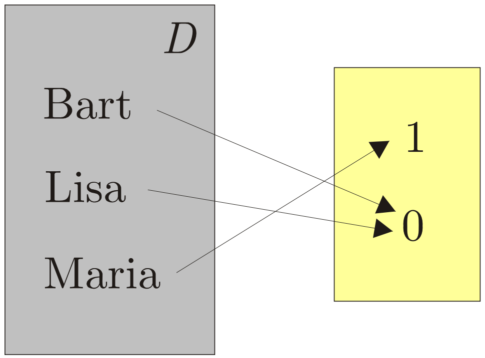
Wenn α ein wfA vom Typ $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$ und β ein wfA vom Typ $\langle e,t\rangle$ ist,

dann ist $[\![\alpha(\beta)]\!]^{M,g} = [\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta]\!]^{M,g})$,

wobei $[\![\alpha]\!]^{M,g}([\![\beta]\!]^{M,g})$ ein wfA vom Typ $\langle e,t\rangle$ ist.

Damit ergibt sich für *schnell'*(*laufen'*) die folgende Denotation:

$[\![schnell'(laufen')]\!]^{M,g}$:

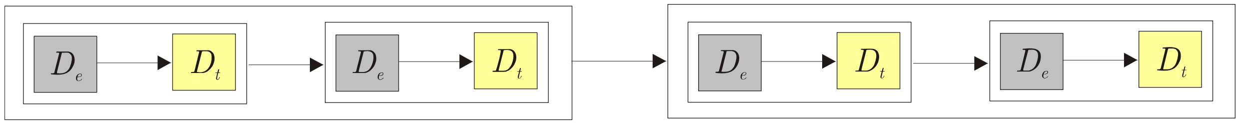


2.3.3 Modifikatoren von Prädikatsmodifikatoren

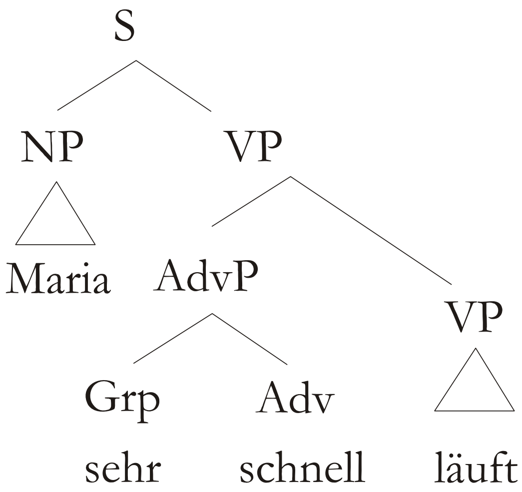
Gradpartikeln wie *sehr*, *ziemlich* oder *ungemein* sind Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle,\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$, d.h. Modifikatoren von Modifikatoren von 1-stelligen Prädikaten der 1. Stufe.

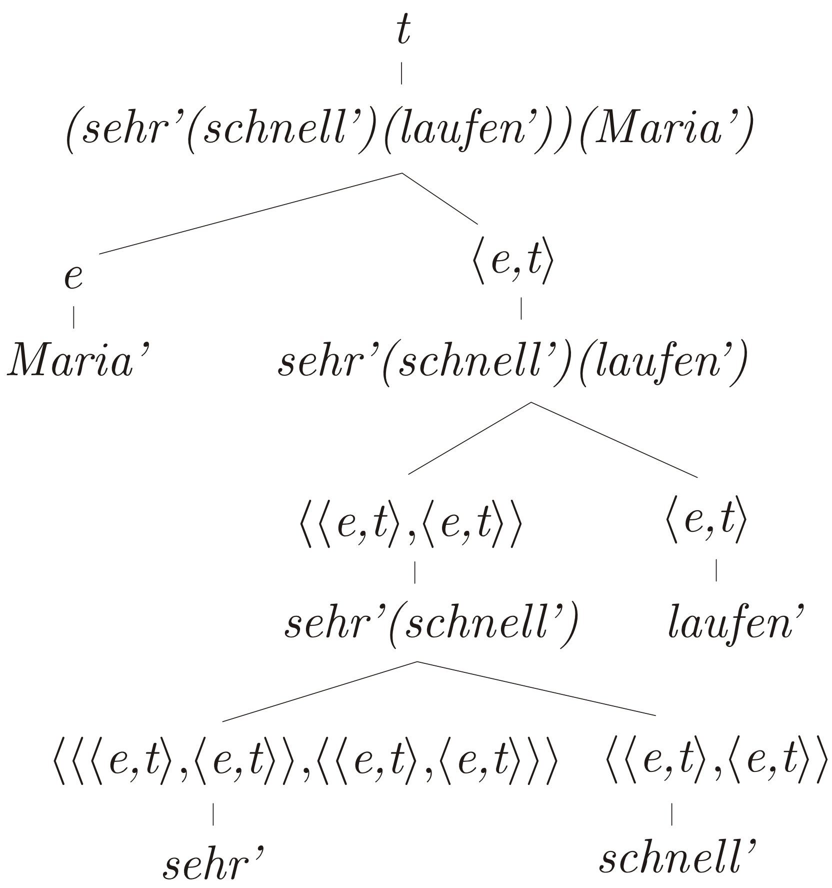
$$\langle\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle,\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle\rangle : ((e \to t) \to (e \to t)) \to ((e \to t) \to (e \to t))$$

$$D_{\langle\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle,\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle\rangle} = D_{\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle}{}^{D_{\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle}} = (D_{\langle e,t\rangle}{}^{D_{\langle e,t\rangle}})^{(D_{\langle e,t\rangle}{}^{D_{\langle e,t\rangle}})} = ((D_t{}^{D_e})^{(D_t{}^{D_e})})^{((D_t{}^{D_e})^{(D_t{}^{D_e})})} :$$



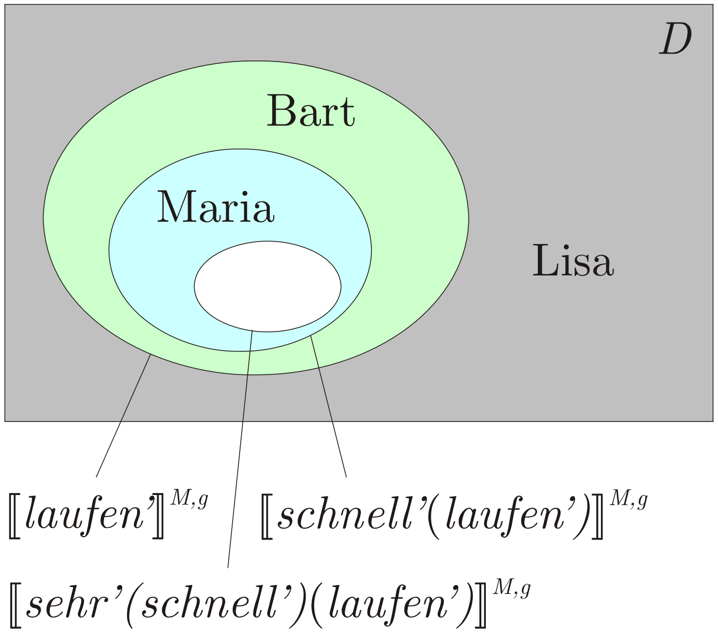
Beispiel: *Maria läuft sehr schnell.*





Die Bedeutung der Gradpartikel *sehr* modifiziert die Bedeutung des Adverbs *schnell*, indem das Ausmaß der Schnelligkeit von Vorgängen spezifiziert wird.

Für den L-Grundausdruck $sehr'$ sei in M eine Denotation angenommen, die die folgende Denotation von $sehr'(schnell')(laufen')$ in Mengennotation ergibt:



2.3.4 Prädikative und attributive Adjektive

Adjektive wie *krank* oder *rot* können sowohl prädikativ (z.B. *Die Frau ist krank*) als auch attributiv (z.B. *kranke Frau*) gebraucht werden.

Entsprechend werden sie als Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle e,t \rangle$ oder vom semantischen Typ $\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$, d.h. als 1-stellige Prädikate der 1. Stufe oder als Modifikatoren von 1-stelligen Prädikaten der 1. Stufe behandelt.

Sie verhalten sich damit semantisch wie intransitive Verben oder absolute Nomen bzw. wie Adverbien.

2.3.5 Satzoperatoren

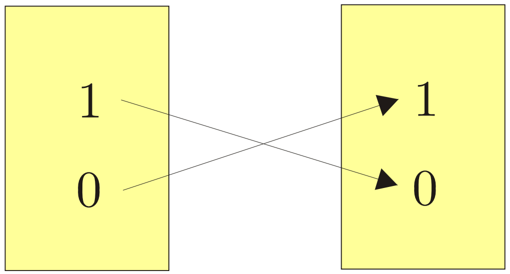
Die **Satznegation** *nicht* ist ein Ausdruck vom semantischen Typ $\langle t,t\rangle$, d.h. ein 1-stelliger satzbildender Funktor von einem Satzargument.

$$\langle t,t\rangle : t \rightarrow t$$

$$D_{\langle t,t\rangle} = {D_t}^{D_t} : \quad \boxed{D_t} \longrightarrow \boxed{D_t}$$

Der logische L-Grundausdruck $nicht'$ hat in jedem Modell M die folgende Denotation:

$[\![nicht']\!]^{M,g}$:



<u>Beispiel:</u> *Maria läuft nicht*

$nicht'(laufen'(Maria'))$

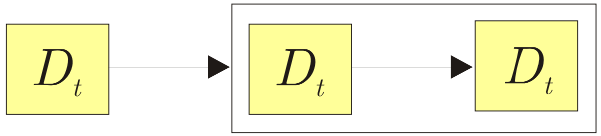
$\boxed{?}$ Bestimme die Denotation des Satzes unter der Voraussetzung, dass Maria läuft.

$$[\![nicht'(laufen'(Maria'))]\!]^{M,g} = [\![nicht']\!]^{M,g}\left([\![laufen'(Maria')]\!]^{M,g}\right) =$$

Die **Satzkoordinationen** *und* und *oder* sind Ausdrücke vom semantischen Typ $\langle t,\langle t,t\rangle\rangle$, d.h. 2-stellige satzbildende Funktoren von Satzargumenten.

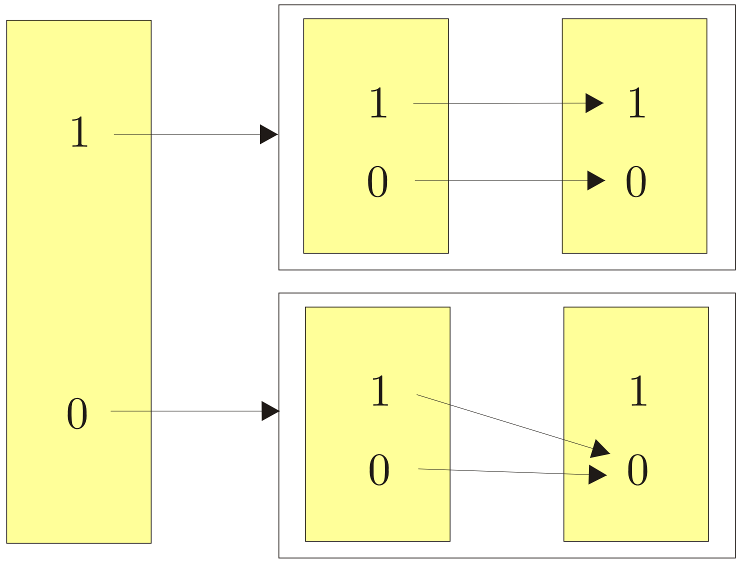
$$\langle t,\langle t,t\rangle\rangle : t \rightarrow (t \rightarrow t)$$

$$D_{\langle t,\langle t,t\rangle\rangle} = (D_t^{D_t})^{D_t}:$$



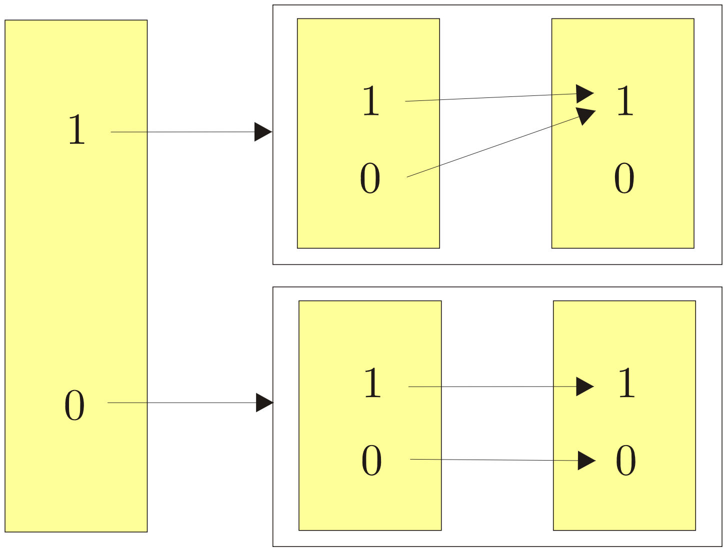
Der logische L-Grundausdruck und' hat in jedem Modell M die folgende Denotation:

$[\![und']\!]^{M,g}$:



Der logische L-Grundausdruck $oder'$ hat in jedem Modell M die folgende Denotation:

$[\![oder']\!]^{M,g}$:



Beispiele: (a) *Maria läuft und Hans schläft.*

$$und'(laufen'(Maria'))(schlafen'(Hans'))$$

(b) *Maria läuft oder Hans schläft.*

$$oder'(laufen'(Maria'))(schlafen'(Hans'))$$

$\boxed{?}$ Bestimme die Denotationen der Sätze unter der Voraussetzung, dass Maria läuft und Hans nicht schläft.

(i) $[\![und'(laufen'(Maria'))(schlafen'(Hans'))]\!]^{M,g} =$

$[\![und']\!]^{M,g}\Big([\![laufen'(Maria')]\!]^{M,g}\Big)\Big([\![schlafen'(Hans')]\!]^{M,g}\Big) =$

(ii) $[\![oder'(laufen'(Maria'))(schlafen'(Hans'))]\!]^{M,g} =$

$[\![oder']\!]^{M,g}\Big([\![laufen'(Maria')]\!]^{M,g}\Big)\Big([\![schlafen'(Hans')]\!]^{M,g}\Big) =$

Überblick

Typ	Ausdruck	Beispiel	Interpretation
e	Individuenterm (z.B. Eigennamen, definite Nominalphrasen)	*Leipzig, Hans, die Sonne, die Frau*	Entität
t	Formel (Sätze)	*Maria läuft.*	Wahrheitswert

Typ	Ausdruck	Beispiel	Interpretation
$\langle e,t\rangle$	1-stelliges Prädikat der 1. Stufe (z.B. intransitive Verben, absolute Nomen, prädikative Adjektive)	*lachen, Student, grün*	Funktion von Entitäten in Wahrheitswerte, d.h. charakteristische Funktion einer Menge von Entitäten
$\langle e,\langle e,t\rangle\rangle$	2-stelliges Prädikat der 1. Stufe (z.B. transitive Verben, relationale Nomen, prädikative komparative Adjektive, Präpositionen)	*lieben, Ehefrau, älter, auf*	Funktion von Entitäten in charakteristische Funktionen
$\langle e,\langle e,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$	3-stelliges Prädikat der 1. Stufe (z.B. ditransitive Verben, Präpositionen)	*schenken, zwischen*	Funktion von Entitäten in Funktionen von Entitäten in charakteristische Funktionen

Typ	**Ausdruck**	**Beispiel**	**Interpretation**
$\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle$	Prädikatsmodifikator (z.B. Adverbien, attributive Adjektive, Wortnegation)	*schnell, schön, un-*	Funktion von charakteristischen Funktionen in charakteristische Funktionen

Typ	Ausdruck	Beispiel	Interpretation
$\langle\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle,\langle\langle e,t\rangle,\langle e,t\rangle\rangle\rangle$	Modifikator von Prädikatsmodifikatoren (z.B. Gradpartikeln)	*sehr, extrem, ziemlich*	Funktion von Funktionen von charakteristischen Funktionen in charakteristische Funktionen in Funktionen von charakteristischen Funktionen in charakteristische Funktionen

Typ	Ausdruck	Beispiel	Interpretation
$\langle t,t \rangle$	Satznegation	*nicht*	Funktion von Wahrheitswerten in Wahrheitswerte
$\langle t,\langle t,t \rangle\rangle$	Satzkoordination	*und, oder, wenn... dann, bevor, während*	Funktion von Wahrheitswerten in Funktionen von Wahrheitswerten in Wahrheitswerte

Übungen

Ü2.3 – Ü2.8

Termin: **nächstes Tutorium**