

6 Semantik von Modalausdrücken

6.1 Modalitäten

Natürliche Sprachen verfügen über Mittel, die es erlauben, etwas über die **Modalität**, d.h. die **Art und Weise** des **Bestehens** von Situationen auszudrücken.

Insbesondere kann sprachlich reflektiert werden, dass eine bestimmte Sachlage notwendig, nur möglich oder aber unmöglich ist.

Modalausdrücke

Zu den Modalausdrücken gehören folgende Arten von Lexemen:

1. Modale Satzadverbien

notwendigerweise, möglicherweise, ..., wahrscheinlich, sicher, vielleicht, ...

2. Modale Adjektive

notwendig, möglich, ..., wahrscheinlich, gewiss, ..., geboten, erlaubt, ..., lösbar, löslich, ...

3. Modalverben

können, müssen, dürfen, wollen, ...

Bei der Interpretation von Sätzen mit Modalausdrücken müssen **Alternativen zur** tatsächlich bestehenden oder **aktualen Welt** betrachtet werden.

Beispiele:

- (1) *Es ist möglich, dass Maria krank ist.*
- (2) *Notwendigerweise ist zwei mal zwei gleich vier.*

Die Wahrheit von (1) hängt nicht davon ab, ob der eingebettete Satz *Maria ist krank* in der aktuellen Welt wahr ist oder nicht, sondern davon, ob dieser Satz wahr sein kann.

Satz (2) hingegen macht eine stärkere Aussage als nur die, dass der Sachverhalt, dass zwei mal zwei gleich vier ist, in unserer Welt besteht.

Vielmehr drückt (2) aus, dass es rationalerweise undenkbar ist, dass der Satz *Zwei mal zwei ist gleich vier* falsch ist.

Folgende Arten von Modalitäten werden unterschieden:

1. Alethische (logische, ontische) Modalität

(griech. *aletheia* ‚Wahrheit‘)

‚notwendig oder möglich aus Gründen der Logik
oder der Mathematik‘

Beispiel:

(3) *Notwendigerweise ist Leipzig identisch mit Leipzig.*

2. Epistemische Modalität

(griech. *episteme* ‚Wissen‘)

‚notwendig oder möglich mit Bezug auf die Erwartungen, die die Sprecherin auf Grund ihres Erfahrungswissens hat‘

Beispiel:

(4) *Es klingelt; das ist sicher Gerda.*

3. Deontische Modalität

(griech. *deon* ‚Pflicht‘)

‚notwendig (geboden) oder möglich (erlaubt) mit Bezug auf ein System von juristischen Gesetzen, sozialen Regeln, moralischen Normen, individuellen Überzeugungen etc.‘

Beispiel:

(5) *Hans darf nach Hause gehen.*

4. Buletische Modalität

‚notwendig oder möglich mit Bezug auf die
Wünsche einer Person‘

Beispiel:

(6) *Fritz möchte ein Bier trinken.*

5. Physische (dispositionale) Modalität

„notwendig oder möglich mit Bezug auf die physischen Umstände oder das Können einer Person“

Beispiel:

(7) *Maria kann Auto fahren.*

Modalverben wie *müssen* und *können* drücken in Abhängigkeit vom Kontext **unterschiedliche Modalitäten** aus.

Beispiele:

(8) *Max muss schlafen.*

(a) Es ist epistemisch notwendig, dass Max schläft.

(b) Es ist deontisch notwendig, dass Max schläft.

(c) Es ist physisch notwendig, dass Max schläft.

(9) *Max kann schlafen.*

(a) Es ist epistemisch möglich, dass Max schläft.

(b) Es ist deontisch möglich, dass Max schläft.

(c) Es ist physisch möglich, dass Max schläft.

6.2 Klassische Modalsemantik

6.2.1 Weltrelativierte Semantik von PL1

Die bisher verwendeten Modelle gingen stillschweigend davon aus, dass der semantische Wert von Sätzen und anderen Ausdrücken jeweils nur in Bezug auf die tatsächliche Welt zu bestimmen ist.

Es gilt nun bei der Festlegung der Denotationen zu berücksichtigen, dass unsere Welt auch **anders** beschaffen sein **könnte**.

Hierzu werden **mögliche Welten** (oder **mögliche Situationen**) in die Modellierung einbezogen.

Mögliche Welten

Der Begriff der möglichen Welt geht auf den Philosophen Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) zurück.

Mögliche Welten sind rational denkbare Alternativen zur **aktualen Welt**.

Es handelt sich also um Welten, die sich einerseits in bestimmter Hinsicht von der tatsächlich bestehenden Welt unterscheiden und andererseits dieser zumindest darin ähnlich sind, dass in ihnen dieselben logischen und mathematischen Gesetze gelten.

Die Weiterentwicklung der formalen Semantik unter Einbeziehung von möglichen Welten wird **Mögliche-Welten-Semantik** genannt.

Dabei werden die Modelle um eine Menge von möglichen Welten W erweitert, und die Interpretationsfunktion I wird auf mögliche Welten **relativiert**.

Damit kann die **Denotation** der nicht-logischen Konstanten und entsprechend auch der komplexeren Ausdrücke von Welt zu Welt **variieren**.

Die Menge der möglichen Welten ist im Gegensatz zur Menge der Zeitpunkte nicht geordnet.

Allerdings braucht man zusätzlich zur Menge möglicher Welten eine **Zugänglichkeitsrelation** zwischen diesen Welten, um die verschiedenen Arten von Modalitäten, darunter insbesondere auch die alethischen, deontischen und epistemischen Modalitäten unterscheiden zu können:

- Für **alethische Modalitäten** drückt die Zugänglichkeitsrelation eine Übereinstimmung der Welten bezüglich der logischen und mathematischen Gesetze aus
- für **deontische Modalitäten** – eine Ähnlichkeit in Bezug auf ein akzeptiertes Normensystem
- Bei **epistemischen Modalitäten** wiederum besagt die Relation, dass nur solche Welten für einander zugänglich sind, die sich im erreichten Stand des Erfahrungswissens gleichen.

Im Falle der nachfolgend betrachteten alethischen Modalitäten ist die **Zugänglichkeitsrelation** reflexiv, symmetrisch und transitiv, d.h. sie ist eine Äquivalenzrelation.

Demnach sind **alle** Welten für einander **zugänglich**, und die Relation muss im Modell nicht extra angegeben werden.

D6.1 Ein **modales Modell** M ist ein geordnetes Tripel $\langle D, W, I \rangle$, wobei

- (i) D die Diskursdomäne,
- (ii) W eine (nichtleere) Menge von möglichen Welten und
- (iii) I die Interpretationsfunktion von M ist, die jeder nicht-logischen Konstanten α relativ zu einer möglichen Welt w eine Denotation zuweist.

Entsprechend werden die **Denotationen** eines beliebigen wfa α auf mögliche Welten **relativiert**.

Notation:

$\llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,g}$: Denotation von α relativ zu dem Modell M , der Welt w und der Variablenbelegung g

Die **weltrelativierten semantischen Regeln** von PL1 unterscheiden sich von den zeitrelativierten Regeln **D5.2** und **D5.3** aus Abschnitt **5.1** nur dadurch, dass überall w an Stelle von t steht.

Beispiel:

Gegeben sei wieder die **PL1-Sprache** L' mit folgenden nicht-logischen Konstanten:

IK: *Anton', Berta', Cäsar', Erna'*

PK: *Frau', Mann', schlafen', vertrauen'*

Für L' sei $\langle D, W, I \rangle$ als ein **modales Modell M** angenommen, wobei gilt:

$$D = \{\text{Anton, Berta, Cäsar, Erna}\},$$

$$W = \{w_1, w_2\} \text{ und}$$

$$I(\text{Anton}', w_1) = I(\text{Anton}', w_2) = \text{Anton},$$

(analog für $\text{Berta}', \text{Cäsar}', \text{Erna}'$),

$$I(\text{Frau}', w_1) = \{\text{Berta, Erna}\},$$

$$I(\text{Frau}', w_2) = \{\text{Cäsar, Erna}\},$$

$$I(\text{Mann}', w_1) = \{\text{Anton, Cäsar}\}$$

$$I(\text{Mann}', w_2) = \{\text{Anton, Berta}\},$$

$$I(\text{schlafen}', w_1) = \{\text{Anton}\},$$

$$I(\text{schlafen}', w_2) = \{\text{Cäsar}\},$$

$$I(\text{vertrauen}', w_1) = \{\langle \text{Anton, Erna} \rangle, \langle \text{Cäsar, Erna} \rangle, \langle \text{Berta, Cäsar} \rangle\}$$

und

$$I(\text{vertrauen}', w_2) = \{\langle \text{Anton, Erna} \rangle, \langle \text{Berta, Cäsar} \rangle\}.$$

Beispiel:

Eine Frau schläft.

SR(*Eine Frau schläft*)

$$= \exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)]$$

w_1 : $\llbracket \exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)] \rrbracket^{M,w_1,g} = 0$, weil es kein $d \in D$ gibt,

so dass $d \in I(Frau', w_1)$ und $d \in I(schlafen', w_1)$.

w_2 : $\llbracket \exists x[Frau'(x) \wedge schlafen'(x)] \rrbracket^{M,w_2,g} = 1$, wegen

Cäsar $\in I(Frau', w_2)$ und Cäsar $\in I(schlafen', w_2)$,

d.h. Cäsar $\in \{Cäsar, Erna\}$ und Cäsar $\in \{Cäsar\}$.

6.2.2 Modale Prädikatenlogik der 1. Stufe (MPL1)

Um Modalausdrücke analysieren zu können, wird PL1 durch die Hinzunahme von zwei **Modaloperatoren** zur modalen Prädikatenlogik der 1. Stufe (MPL1) **erweitert**.

Wie die (klassischen) Temporaloperatoren sind auch sie Ausdrücke vom **Typ $\langle t, t \rangle$** .

1. Ergänzung zum **Vokabular** von PL1 (vgl. Abschnitt 1.2):

Möglichkeitsoperator: \diamond (alternativ: M)

Notwendigkeitsoperator: \square (alternativ: N)

2. Ergänzung zu den **syntaktischen Regeln** von PL1
(D1.1, Abschnitt 1.2):

(6) Wenn ϕ eine Formel ist, dann sind $\diamond\phi$ und $\Box\phi$ Formeln.

- $\diamond\phi$ wird gelesen als „Es ist möglich, dass ϕ
(oder möglicherweise ϕ).“
- $\Box\phi$ wird gelesen als „Es ist notwendig, dass ϕ
(oder notwendigerweise ϕ).“

Ähnlich wie die Temporaloperatoren P und F sowie H und G entsprechend als implizite \exists - bzw. \forall -Quantoren über Zeitpunkte verstanden werden, so betrachtet man nun die **Modaloperatoren** \diamond und \square als implizite Quantoren über mögliche Welten.

Die Grundlagen dieses Verständnisses sind von Saul Kripke (1958) geschaffen worden.

3. Ergänzung zu den (weltrelativierten) **semantischen Regeln** von PL1 (Abschnitt 6.2.1):

(6) (a) $\llbracket \diamond \phi \rrbracket^{M,w,g} = 1$ gdw für mindestens ein $w' \in W$ gilt:

$$\llbracket \phi \rrbracket^{M,w',g} = 1.$$

(b) $\llbracket \square \phi \rrbracket^{M,w,g} = 1$ gdw für jedes $w' \in W$ gilt:

$$\llbracket \phi \rrbracket^{M,w',g} = 1.$$

$\diamond \phi$ ist also **wahr** in w genau dann, wenn ϕ in mindestens einer Welt wahr ist.

$\square \phi$ ist **wahr** in w genau dann, wenn ϕ in einer beliebigen Welt wahr ist.

Beispiele:

(1) *Cäsar ist möglicherweise eine Frau.*

$$\begin{aligned} & \mathbf{SR}(\text{Cäsar ist möglicherweise eine Frau}) \\ &= \diamond \text{Frau}'(\text{Cäsar}') \end{aligned}$$

$$w_1: \llbracket \diamond \text{Frau}'(\text{Cäsar}') \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 1,$$

weil in w_2 gilt:

$$\llbracket \text{Frau}'(\text{Cäsar}') \rrbracket^{M_1, w_2, g} = 1.$$

(2) *Es kann sein, dass ein Mann schläft.*

$$\begin{aligned} & \mathbf{SR}(\textit{Es kann sein, dass ein Mann schläft}) \\ &= \diamond \exists x [\textit{Mann}'(x) \wedge \textit{schlafen}'(x)] \end{aligned}$$

$$w_2: \quad \llbracket \diamond \exists x [\textit{Mann}'(x) \wedge \textit{schlafen}'(x)] \rrbracket^{M_1, w_2, g} = 1,$$

weil in w_1 gilt:

$$\llbracket \exists x [\textit{Mann}'(x) \wedge \textit{schlafen}'(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 1.$$

(3) *Es ist notwendig, dass keine Frau schläft.*

$$\begin{aligned} & \mathbf{SR}(\textit{Es ist notwendig, dass keine Frau schläft}) \\ &= \Box \neg \exists x [Frau'(x) \wedge schlafen'(x)] \end{aligned}$$

$$w_1: \llbracket \Box \neg \exists x [Frau'(x) \wedge schlafen'(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 0,$$

weil in w_2 gilt:

$$\llbracket \exists x [Frau'(x) \wedge schlafen'(x)] \rrbracket^{M_1, w_2, g} = 1.$$

(4) *Notwendigerweise vertraut jeder Mann Erna.*

SR(*Notwendigerweise vertraut jeder Mann Erna*)

$$= \Box \forall x [Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)]$$

$$w_1: \llbracket \Box \forall x [Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 1,$$

weil in w_1 gilt:

$$\llbracket \forall x [Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 1$$

und in w_2 gilt:

$$\llbracket \forall x [Mann'(x) \rightarrow vertrauen'(Erna')(x)] \rrbracket^{M_1, w_2, g} = 1$$

Logische Beziehungen

Es gelten u.a. die folgenden logischen Implikationen und Äquivalenzen:

$$(1) \quad \Box\phi \Rightarrow \phi$$

$$(2) \quad \phi \Rightarrow \Diamond\phi$$

$$(3) \quad \Box\phi \Rightarrow \Diamond\phi$$

[?] Warum gelten (1) und (2) nicht, wenn \Box im Sinne von ‚deontisch notwendig (oder geboten)‘ bzw. \Diamond im Sinne von ‚deontisch möglich (oder erlaubt)‘ verstanden werden?

$$(4) \quad \Box\phi \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg\phi$$

$$(5) \quad \Diamond\phi \Leftrightarrow \neg\Box\neg\phi$$

Auf Grund von (4) und (5) sind die Operatoren \Box und \Diamond gegenseitig definierbar, d.h. es reicht eigentlich aus, nur einen der beiden Operatoren zum Vokabular hinzuzufügen und den anderen nachträglich definatorisch einzuführen.

$$\mathbf{D6.2} \quad \Box\phi =_{def} \neg\Diamond\neg\phi$$

$$\mathbf{D6.3} \quad \Diamond\phi =_{def} \neg\Box\neg\phi$$

$$(6) \quad \neg\Diamond\phi \Leftrightarrow \Box\neg\phi \quad (\neg\Diamond\phi \text{ wird gelesen als „es ist unmöglich, dass } \phi\text{“.)}$$

$$(7) \quad \Diamond\neg\phi \Leftrightarrow \neg\Box\phi$$

Da die Modaloperatoren \Box und \Diamond eine existentielle bzw. universelle Quantifizierung über Welten w ausdrücken, ist eine Interaktion mit dem \forall - und dem \exists -Quantor zu erwarten.

$$(8) \quad \exists x[\Diamond P(x)] \Rightarrow \Diamond \exists x[P(x)]$$

$$(9) \quad \Diamond \exists x[P(x)] \Leftrightarrow \exists x[\Diamond P(x)]$$

Die Umkehrung der logischen Implikation in (8) und damit die logische Äquivalenz in (9) gelten nur, wenn man für jedes $w \in W$ **dieselbe** Diskursdomäne D **voraussetzt** (was hier aus Gründen der Vereinfachung getan wird).

Das wird klar, wenn man sich den Inhalt der beiden Formeln in (9) vergegenwärtigt:

- (a) $\diamond \exists x [P(x)]$: „Möglicherweise, d.h. in irgendeinem w gibt es ein x derart, dass gilt: $P(x)$.“
- (b) $\exists x [\diamond P(x)]$: „Es gibt ein x derart, dass möglicherweise, d.h. in irgendeinem w gilt: $P(x)$.“

Angenommen, die obige **Voraussetzung** werde **nicht** getroffen.

Gelte nun (a), d.h. es ist möglich, dass ein x die Eigenschaft P hat.

Damit muss nicht (b) gelten, d.h. dass ein aktual existierendes x möglicherweise die Eigenschaft P hat.

Wenn es z.B. möglich ist, dass Angela Merkel ein Kind hat, dann folgt daraus nicht, dass es einen tatsächlich existierenden Menschen gibt, der möglicherweise ein Kind von Frau Merkel ist.

Analoges trifft für die folgenden Beziehungen zu:

$$(10) \quad \Box \forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [\Box P(x)]$$

$$(11) \quad \forall x [\Box P(x)] \Leftrightarrow \Box \forall x [P(x)]$$

Auch hier gelten die Umkehrung der logischen Implikation in (10) und damit die logische Äquivalenz in (11) nur, wenn man für jedes $w \in W$ **dieselbe** Diskursdomäne D **voraussetzt**.

(a) $\forall x [\Box P(x)]$: „Jedes x ist derart, dass notwendigerweise, d.h. in jedem w gilt: $P(x)$.“

(b) $\Box \forall x [P(x)]$: „Notwendigerweise, d.h. in jedem w ist jedes x derart, dass gilt: $P(x)$.“

Wieder angenommen, die obige **Voraussetzung** werde **nicht** getroffen.

Gelte nun, dass jeder (tatsächlich existierende) Mensch notwendigerweise kein Kind von Angela Merkel ist.

Dann folgt daraus nicht, dass notwendigerweise jeder Mensch kein Kind von Angela Merkel ist, dass sie also kein Kind hätte haben können.

In den folgenden Formeln kommt entsprechend \diamond zusammen mit \forall und \square zusammen mit \exists vor.

Dabei gelten generell nicht die Umkehrungen der logischen Implikationen und damit auch nicht die jeweiligen logischen Äquivalenzen.

$$(12) \quad \diamond \forall x [P(x)] \Rightarrow \forall x [\diamond P(x)]$$

$$(13) \quad \exists x [\square P(x)] \Rightarrow \square \exists x [P(x)]$$

Beispiele:

(1) *Jeder Mann kann schlafen.*

Der Satz ist **skopusambig** und gibt deshalb Anlass zu **zwei Lesarten** (a) und (b).

(a) **SR₁**: $\forall x [Mann'(x) \rightarrow \diamond schlafen'(x)]$

w_1 : $\llbracket \forall x [Mann'(x) \rightarrow \diamond schlafen'(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 1$, weil für jedes $d \in D$, für das gilt: $\llbracket Mann'(x) \rrbracket^{M_1, w_1, g[x \rightarrow d]} = 1$, ein w existiert, in dem gilt: $\llbracket schlafen'(x) \rrbracket^{M_1, w, g[x \rightarrow d]} = 1$.

w_2 : $\llbracket \forall x [Mann'(x) \rightarrow \diamond schlafen'(x)] \rrbracket^{M_1, w_2, g} = 0$, weil zwar gilt: $\llbracket Mann'(x) \rrbracket^{M_1, w_2, g[x \rightarrow Berta]} = 1$, aber es kein w gibt, in dem gilt: $\llbracket schlafen'(x) \rrbracket^{M_1, w, g[x \rightarrow Berta]} = 1$.

(b) **SR₂**: $\diamond \forall x [Mann'(x) \rightarrow schlafen'(x)]$

$$w_1: \llbracket \diamond \forall x [Mann'(x) \rightarrow schlafen'(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 0,$$

weil in keinem w gilt:

$$\llbracket \forall x [Mann'(x) \rightarrow schlafen'(x)] \rrbracket^{M_1, w, g} = 1.$$

(2) *Eine Frau muss Cäsar vertrauen.*

Auch dieser Satz ist skopusambig und gibt Anlass zu zwei Lesarten (a) und (b):

(a) **SR₁**: $\exists x [Frau'(x) \wedge \Box vertrauen'(Cäsar')(x)]$

$$w_1: \llbracket \exists x [Frau'(x) \wedge \Box vertrauen'(Cäsar')(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 1,$$

weil für Berta $\llbracket Frau'(x) \rrbracket^{M_1, w_1, g[x \rightarrow Berta]} = 1$ ist und außerdem in jedem w gilt:

$$\llbracket vertrauen'(Cäsar')(x) \rrbracket^{M_1, w, g[x \rightarrow Berta]} = 1.$$

(b) **SR₂**: $\Box \exists x [Frau'(x) \wedge vertrauen'(Cäsar')(x)]$

$$w_1: \llbracket \Box \exists x [Frau'(x) \wedge vertrauen'(Cäsar')(x)] \rrbracket^{M_1, w_1, g} = 0,$$

weil nicht in jedem w gilt:

$$\llbracket \exists x [Frau'(x) \wedge vertrauen'(Cäsar')(x)] \rrbracket^{M_1, w, g} = 1.$$

□ Welchen Wahrheitswert hat die Lesart (a) in der Welt w_2 ?

6.3 Indexsemantik

Bisher wurde ein Ausdruck entweder bezüglich eines Zeitpunktes oder bezüglich einer möglichen Welt interpretiert.

Da die meisten Sprachen **sowohl Modal- als auch Temporalausdrücke** haben und die Interpretation von Ausdrücken allgemein sowohl vom Zeitpunkt als auch von der möglichen Welt abhängen kann, ist es wünschenswert, beide Bezugsweisen **zusammenzuführen**.

Beispiel:

Möglicherweise werden Hans und Maria im nächsten Sommer heiraten.

Deshalb wird die Denotation eines Ausdrucks α nicht mehr nur zu einem Zeitpunkt t oder in einer möglichen Welt w , sondern vielmehr an einem Welt-Zeitpunkt $\langle w, t \rangle$ betrachtet, d.h. einem geordneten Paar, bestehend aus der Welt w und dem Zeitpunkt t .

6.3.1 Indizes

Es wird nunmehr sowohl eine Menge W von Welten als auch eine (geordnete) Menge von Zeitpunkten T angenommen.

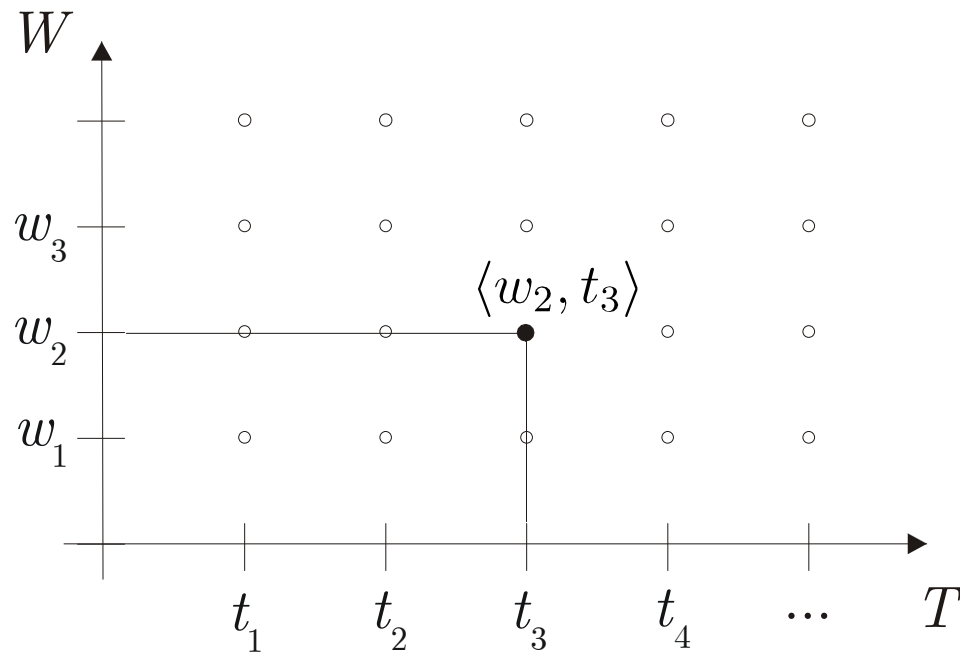
Das **Kartesische Produkt** der beiden Mengen $W \times T$ ist die Menge aller Paare $\langle w, t \rangle$ von Welt-Zeitpunkten.

Ein Paar $\langle w, t \rangle \in W \times T$ wird ein **Index** genannt.

Ein Index kann als Koordinate in einem Koordinatensystem mit einer **Weltachse** W und einer **Zeitachse** T aufgefasst werden.

Bewegt man sich auf der Zeitachse, so betrachtet man eine Welt zu verschiedenen Zeitpunkten, bewegt man sich auf der Weltachse, so betrachtet man verschiedene Welten zu einem Zeitpunkt.

Damit steht z.B. der Index $\langle w_2, t_3 \rangle$ für die Welt w_2 zum Zeitpunkt t_3 .



Temporaloperatoren werden jetzt so verstanden, dass sie eine Verschiebung der Zeitkoordinate in die Vergangenheit oder in die Zukunft bewirken, und zwar so, dass dabei die Weltkorrdinate unverändert bleibt.

Für das Verständnis der Modaloperatoren gibt es jeweils zwei Möglichkeiten.

So kann der \Box -Operator folgendermaßen interpretiert werden:

- (i) ‚notwendig zur Zeit t ‘
- (ii) ‚notwendig zu **beliebigen** Zeiten‘

Damit nach der Interpretation (i) $\Box\phi$ an einem Index $\langle w, t \rangle$ **wahr** ist, muss ϕ an $\langle w', t \rangle$ für alle $w' \in W$ wahr sein, d.h. an allen Indizes mit derselben Zeitkoordinate t , aber möglicherweise verschiedenen Weltkoordinaten w' .

Wird dagegen (ii) gewählt, dann ist $\Box\phi$ an $\langle w, t \rangle$ **wahr**, falls ϕ an allen Indizes $\langle w', t' \rangle$, d.h. in allen $w' \in W$ und zu allen $t' \in T$ wahr ist.

Nachfolgend wird die Interpretation (ii) gewählt. Allgemein werden also Modaloperatoren als implizite Quantoren sowohl über beliebige Welten als auch über beliebige Zeitpunkte verstanden.

6.3.2 Modale und temporale Prädikatenlogik der 1. Stufe (MTPL1)

Die Syntax und Semantik von MTPL1 wird wieder durch eine passende Erweiterung von PL1 erhalten.

- Ergänzung zum **Vokabular** von PL1: \diamond, \square, P, F
- Ergänzung zu den **syntaktischen Regeln** von PL1:
 - (6) Wenn ϕ eine Formel ist, dann sind auch $\diamond\phi$ und $\square\phi$ Formeln.
 - (7) Wenn ϕ eine Formel ist, dann sind $P\phi$ und $F\phi$ Formeln.

D6.4 Ein **Index-Modell** M ist ein geordnetes Quintupel $\langle D, W, T, <, I \rangle$, wobei

- (i) D die Diskursdomäne,
- (ii) W eine (nichtleere) Menge von möglichen Welten,
- (iii) T eine (nichtleere) Menge von Zeitpunkten,
- (iv) $<$ eine Ordnungsrelation auf T und
- (v) I die Interpretationsfunktion von M ist, die jeder nicht-logischen Konstanten vom Typ a relativ zu einem Index $\langle w, t \rangle$, d.h. zu einem Zeitpunkt t und in einer möglichen Welt w eine Denotation aus D_a zuweist.

Entsprechend werden die **Denotationen** von beliebigen wfA α von MTPL1 auf eine mögliche Welt w und einen Zeitpunkt t **relativiert**.

Notation:

$\llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} :$

die Denotation von α relativ zu
dem Modell M ,
der möglichen Welt w ,
dem Zeitpunkt t und
der Variablenbelegung g

- Ergänzung zu den **semantischen Regeln** von PL1 :

(6) (a) $\llbracket \Diamond \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw für mindestens ein $w' \in W$ und für mindestens ein $t' \in T$ gilt: $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w',t',g} = 1$.

(b) $\llbracket \Box \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw für jedes $w' \in W$ und für jedes $t' \in T$ gilt:
 $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w',t',g} = 1$.

(7) (a) $\llbracket P\phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw für mindestens ein $t' \in T$ mit $t' < t$ gilt:
 $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t',g} = 1$.

(b) $\llbracket F\phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw für mindestens ein $t' \in T$ mit $t < t'$ gilt:
 $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t',g} = 1$.

Beispiel:

Gegeben sei das folgende **Modell** $M = \langle D, W, T, <, I \rangle$, wobei gilt:

$$D = \{\text{Anton, Boris, Clara, Daphne}\},$$

$$W = \{w_1, w_2\},$$

$$T = \{t_1, t_2, t_3\},$$

$$< = \{\langle t_1, t_2 \rangle, \langle t_2, t_3 \rangle, \langle t_1, t_3 \rangle\} \text{ und}$$

$$I(\text{Anton}', \langle w, t \rangle) = \text{Anton} \text{ f\"ur alle } \langle w, t \rangle \in W \times T,$$

$$I \text{ analog f\"ur } \text{Boris}', \text{Clara}', \text{Daphne}',$$

$I(\text{Frau}', \langle w, t \rangle)$ gemäß folgender Zuordnungstabelle:

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	{Clara, Daphne}	{Clara, Daphne}	{Clara, Daphne}
w_2	{Clara, Daphne}	{Daphne}	\emptyset

$I(\text{Mann}', \langle w, t \rangle)$ entsprechend wie folgt:

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	{Anton, Boris}	{Anton, Boris}	{Anton, Boris}
w_2	{Anton, Boris}	{Anton, Boris, Clara}	{Anton, Clara}

$I(\text{schlafen}', \langle w, t \rangle)$ ergebe sich aus

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	{Clara}	{Anton, Clara}	{Anton, Boris, Clara}
w_2	\emptyset	\emptyset	{Anton, Boris, Clara, Daphne}

Für $I(\text{vertrauen}', \langle w, t \rangle)$ sei festgelegt

$\langle w_i, t_j \rangle$	t_1	t_2	t_3
w_1	$\{\langle \text{Clara, Anton} \rangle,$ $\langle \text{Clara, Boris} \rangle,$ $\langle \text{Clara, Daphne} \rangle\}$	$\{\langle \text{Anton, Clara} \rangle,$ $\langle \text{Clara, Anton} \rangle\}$	$\{\langle \text{Anton, Boris} \rangle,$ $\langle \text{Boris, Boris} \rangle,$ $\langle \text{Clara, Boris} \rangle,$ $\langle \text{Daphne, Boris} \rangle\}$
w_2	$\{\langle \text{Daphne, Daphne} \rangle\}$	\emptyset	$D \times D$

Beispiele:

(1) *Eine Frau, die nicht schläft, vertraut Boris.*

SR(*Eine Frau, die nicht schläft, vertraut Boris*)

$$= \exists x[Frau'(x) \wedge \neg schlafen'(x) \wedge vertrauen'(Boris')(x)]$$

$\langle w_1, t_3 \rangle$:

$$\llbracket \exists x[Frau'(x) \wedge \neg schlafen'(x) \wedge vertrauen'(Boris')(x)] \rrbracket^{M, w_1, t_3, g} = 1,$$

weil es ein Individuum, nämlich Daphne gibt, so dass

$$\llbracket Frau'(x) \rrbracket^{M, w_1, t_3, g[x \rightarrow Daphne]} = 1,$$

$$\llbracket schlafen'(x) \rrbracket^{M, w_1, t_3, g[x \rightarrow Daphne]} = 0 \text{ und auch}$$

$$\llbracket vertrauen'(Boris')(x) \rrbracket^{M, w_1, t_3, g[x \rightarrow Daphne]} = 1 \text{ gilt.}$$

$\langle w_2, t_2 \rangle$:

$$\llbracket \exists x [Frau'(x) \wedge \neg schlafen'(x) \wedge vertrauen'(Boris')(x)] \rrbracket^{M, w_2, t_2, g} = 0$$

weil für kein Individuum $d \in D$ gilt:

$$\llbracket vertrauen'(Boris')(x) \rrbracket^{M, w_2, t_2, g[x \rightarrow d]} = 1,$$

wodurch die gesamte Konjunktion den Wert 0 erhält.

(2) *Anton muss ein Mann sein.*

$$\mathbf{SR}(\textit{Anton muss ein Mann sein}) = \Box \textit{Mann}'(\textit{Anton}')$$

Der Wahrheitswert ist in allen Welt-Zeitpunkten gleich:

Für alle $i \in \{1,2\}$ und alle $j \in \{1,2,3\}$ ist

$$\llbracket \Box \textit{Mann}'(\textit{Anton}') \rrbracket^{M,w_i,t_j,g} = 1,$$

weil für jedes $w' \in W$ und jedes $t' \in T$ gilt:

$$\llbracket \textit{Mann}'(\textit{Anton}') \rrbracket^{M,w',t',g} = 1$$

(3) *Irgendein Mann war früher eine Frau.*

$$\begin{aligned} \mathbf{SR}(\textit{Irgendein Mann war früher eine Frau}) \\ = \exists x[\textit{Mann}'(x) \wedge \mathbf{P}(\textit{Frau}'(x))] \end{aligned}$$

$$\langle w_2, t_3 \rangle : \llbracket \exists x[\textit{Mann}'(x) \wedge \mathbf{P}(\textit{Frau}'(x))] \rrbracket^{M, w_2, t_3, g} = 1,$$

weil für Clara gilt:

$$\llbracket \textit{Mann}'(x) \rrbracket^{M, w_2, t_3, g[x \rightarrow \textit{Clara}]} = 1 \text{ und}$$

$$\llbracket \mathbf{P}(\textit{Frau}'(x)) \rrbracket^{M, w_2, t_3, g[x \rightarrow \textit{Clara}]} = 1.$$

Letzteres ist der Fall, da $t_1 < t_3$ und

$$\llbracket \textit{Frau}'(x) \rrbracket^{M, w_2, t_1, g[x \rightarrow \textit{Clara}]} = 1.$$

$$\langle w_1, t_1 \rangle : \llbracket \exists x[\textit{Mann}'(x) \wedge \mathbf{P}(\textit{Frau}'(x))] \rrbracket^{M, w_1, t_1, g} = 0,$$

weil für jedes Individuum $d \in D$ insbesondere gilt:

$$\llbracket \mathbf{P}(\textit{Frau}'(x)) \rrbracket^{M, w_1, t_1, g[x \rightarrow d]} = 0,$$

da es kein $t' \in T$ mit $t' < t_1$ gibt.

□ Welchen Wahrheitswert hat der Satz *Jeder vertraut sich selbst* in $\langle w_2, t_3 \rangle$?

Logische Beziehungen

Es gelten u.a. die folgenden logischen Implikationen:

$$(1) \quad \Box\phi \Rightarrow \mathbf{F}\phi$$

$$(2) \quad \Box\phi \Rightarrow \mathbf{P}\phi$$

$$(3) \quad \mathbf{F}\phi \Rightarrow \Diamond\phi$$

$$(4) \quad \mathbf{P}\phi \Rightarrow \Diamond\phi$$

Indexikalische Ausdrücke

Die Zeit und die Welt einer Äußerung gehören zu den Parametern, die für die **kontextabhängige Interpretation** von natürlichsprachlichen Ausdrücken relevant sind.

Andere kontextuelle Parameter sind z.B. die Sprecherin, die Adressatin, der Ort der Äußerung und eventuell der Gegenstand, auf den in der Äußerungssituation mit einem Ausdruck verwiesen wird.

Solche Aspekte der Äußerungssituation spielen eine besondere Rolle für die Festlegung der Denotation von deiktischen oder indexikalischen Ausdrücken, zu denen – neben den Tempora –

- **Personalpronomina** wie *ich* und *du*,
- **lokale Adverbien** wie *hier* und *dort*,
- **temporale Adverbien** wie *jetzt* und *morgen*,
- **Demonstrativa** wie *dies-* und *jen-*,

gehören.

Beispiele:

- (1) *Ich bin hier, und du bist dort.*
- (2) *Paul ist jetzt in Leipzig und wird morgen nach Köln fahren.*
- (3) *Maria mag dieses Buch, und Hans jenes Buch.*

Eine mögliche Strategie ist, die **Relativierung** von Denotationen auf mögliche Welten und Zeitpunkte entsprechend zu **generalisieren**.

Nach David Lewis (1972) beinhaltet dann ein **Index** nicht nur die Koordinaten w und t , sondern außerdem mindestens die Spezifikation

- einer Sprecherin s ,
- einer Adressatin a und
- eines Ortes p .

Als Symbol für einen solchen Index wird i verwendet.

Beispielsweise kann dann das **Pronomen** *ich* als ein Individuenterm behandelt werden, dessen Denotation relativ zu dem Modell M , dem Index i und der Variablenbelegung g durch folgende semantische Regel angegeben wird:

- $\llbracket ich \rrbracket^{M,i,g} = s$.

Übungen

Ü6.1 – Ü6.6

Termin: nächstes Tutorium