

7 Intensionale Semantik

7.1 Intension und Extension

Bisher wurde eine **extensionale Semantik** verfolgt. D.h. als Denotationen von Sätzen wurden Wahrheitswerte, als Denotationen von Individuenausdrücken Individuen und als Denotationen von 1-stelligen Prädikaten der 1. Stufe Mengen von Individuen bzw. deren charakteristische Funktionen usw. angegeben.

Wie besonders in Kapitel 5 und 6 deutlich geworden ist, werden damit Denotationen stets als etwas behandelt, das auf bestimmte Parameter – die Zeit, die mögliche Welt, dem Index usw. – relativiert ist.

Bereits **Gottlob Frege** hat festgestellt, dass ein solches Herangehen in vielen Zusammenhängen zu Schwierigkeiten führt und deshalb unzureichend ist.

Frege betrachtet u.a. Sätze mit den Individuenausdrücken *der Morgenstern* und *der Abendstern*, von denen (inzwischen) bekannt ist, dass sie auf den Planeten Venus referieren.

Da beide Ausdrücke also dasselbe Individuum denotieren, können sie in einem Satz wie (1a) bzw. (1b) gegeneinander ausgetauscht werden, ohne dass sich der Wahrheitswert des Satzes ändert.

- (1) (a) *Der Morgenstern ist schön.*
- (b) *Der Abendstern ist schön.*

Für solche Sätze gilt das **Leibnizgesetz**:

- Wenn $\alpha = \beta$, dann $\phi \leftrightarrow \phi[\alpha // \beta]$,
wobei sich $\phi[\alpha // \beta]$ von ϕ dadurch unterscheidet, dass α an
einer oder mehreren Stellen durch β ersetzt worden ist.

Das ist aber nicht immer der Fall.

- (2) (a) *Notwendigerweise ist der Morgenstern der Morgenstern.*
- (b) *Notwendigerweise ist der Morgenstern der Abendstern.*

Satz (2a) ist **wahr**, weil *der Morgenstern = der Morgenstern* **logisch wahr** und damit an jedem Index (oder in jeder möglichen Situation) wahr ist.

Dagegen ist (2b) **nicht wahr**, weil die Identität des Morgensterns mit dem Abendstern lediglich eine **kontingente** Tatsache ist, d.h. es könnte auch anders sein.

Daher **folgt** aus (2a) **nicht** logisch (2b).

Analog **folgt** aus (3a) **nicht** logisch (3b).

Während Satz (3a) wahr sein sollte – vorausgesetzt, Paul ist eine rationale Person – kann (3b) falsch sein, wenn Paul sich nicht gut in Astronomie auskennt.

- (3) (a) Paul glaubt, dass der Morgenstern der Morgenstern ist.
- (b) Paul glaubt, dass der Morgenstern der Abendstern ist.

Syntaktische Konstruktionen der betrachteten Art, d.h. Sätze mit Modalausdrücken und die Komplemente von Verben wie

glauben, wissen, meinen oder annehmen

werden als oblique oder referenziell opak bezeichnet.

Im Unterschied dazu werden die ‚gewöhnlichen‘ Konstruktionen, d.h. jene, für die das Leibnizgesetz zutrifft, referenziell transparent genannt.

In seinem Artikel *Über Sinn und Bedeutung* (1892) schlägt Frege vor, den beobachteten Differenzen dadurch zu entsprechen, dass für einen beliebigen Ausdruck zwischen seinem Sinn und seiner Bedeutung **unterschieden** wird.

- Die **Bedeutung** eines Ausdrucks ist im Wesentlichen das, was bisher als die Denotation des Ausdrucks (relativ zu bestimmten Parametern) betrachtet wurde.
- Unter dem **Sinn** eines Ausdrucks wird etwas verstanden, das sich nach Frege mit der ‚Art des Gegebenseins‘ der Denotation des Ausdrucks umschreiben lässt.

Die Ausdrücke *der Morgenstern* und *der Abendstern* stimmen damit zwar in ihrer Bedeutung, nicht aber in ihrem Sinn – ‚der Stern, der am Morgen leuchtet‘ vs. ‚der Stern, der am Abend leuchtet‘ – überein.

Die obige Beobachtung erklärt Frege nun wie folgt:

Ein beliebiger Ausdruck hat in ‚normalen‘, d.h. referenziell transparenten Kontexten seine ‚normale‘ **Denotation**. Dagegen denotiert er in referenziell opaken Kontexten seinen **Sinn**.

Wenn aber zwei Ausdrücke unterschiedliche Sinne haben, d.h. keine Identität der Sinne vorliegt, wird die **Bedingung** des Leibnizgesetzes gar **nicht erfüllt**. Seine Verletzung ist daher nur scheinbar.

Eine erste Präzisierung der Überlegungen Freges hat **Rudolf Carnap** (*Meaning and Necessity*, 1947) vorgenommen.

Carnap führt für die Begriffe des Sinns und der Bedeutung die beiden formalen Termini *Intension* und *Extension* ein.

Die **Intension** eines Ausdrucks α ist eine Funktion, die jeder möglichen Situation s eine passende Entität als Wert von α in s zuordnet.

Die **Extension** eines Ausdrucks α in einer möglichen Situation s ist der Wert der Intension von α , angewendet auf s .

Eine Intension ist also eine Funktion von möglichen Situationen (Indizes, möglichen Welten usw.) in Extensionen, d.h. in Denotationen im bisherigen Sinne.

Die Intension eines Ausdrucks ist damit nichts anderes als die Gesamtheit all der variierenden Extensionen, die der Ausdruck relativ zu einer möglichen Situation (einem Index, einer möglichen Welt usw.) hat.

Bei der Interpretation von Ausdrücken sind nun genauer zwei Arten von Denotationen

- die Extensionen oder **extensionalen Denotationen** und
- die Intensionen oder **intensionalen Denotationen**

zu unterscheiden.

Das Teilgebiet der Semantik, in dem primär die Intensionen von Ausdrücken analysiert werden, wird **intensionale Semantik** genannt.

Notation: $\llbracket \alpha \rrbracket$: die Intension von α
 $\llbracket \alpha \rrbracket (s)$ bzw. $\llbracket \alpha \rrbracket^s$: die Extension von α in s

Für Ausdrücke unterschiedlichen Typs gibt es **Intensionen** von unterschiedlicher Art.

Insbesondere wird zwischen *Propositionen*, *Individuenkonzepten* und *Attributen* differenziert.

- Für beliebige Sätze ϕ ist die **Proposition** $[[\phi]]$ eine Funktion, die jeder möglichen Situation s als Extension $[[\phi]]^s$ den Wahrheitswert von ϕ in s zuordnet.

- Für beliebige Individuenausdrücke τ ist das **Individuenkonzept** $\llbracket \tau \rrbracket$ eine Funktion, die jeder möglichen Situation s als Extension $\llbracket \tau \rrbracket^s$ das Individuum zuordnet, auf das τ in s referiert.

- Für beliebige n-stellige Prädikate der 1. Stufe π^n ist das **Attribut** (die Eigenschaft oder die intensionale Relation) $[[\pi^n]]$ eine Funktion, die jeder möglichen Situation s als Extension $[[\pi^n]]^s$ eine Menge von n-Tupeln ($n \geq 1$) von Individuen in s zuordnet.

Ausdrücke gehören deshalb nicht nur einem extensionalen Typ a , sondern auch einem intensionalen Typ $\langle s, a \rangle$ an, wobei hier s für ‚mögliche Situation‘, ‚Index‘, ‚mögliche Welt‘ usw. steht.

Satz

Intension	intensionaler Typ	Extension	extensionaler Typ
Proposition als eine Funktion von Situationen in Wahrheitswerte	$\langle s, t \rangle$	Wahrheitswert	t

Individuenausdruck

Intension	intensionaler Typ	Extension	extensionaler Typ
Individuenkonzept als eine Funktion von Situationen in Individuen	$\langle s, e \rangle$	Individuum	e

1-stelliges Prädikat der 1. Stufe

Intension	intensionaler Typ	Extension	extensionaler Typ
Eigenschaft als eine Funktion von Situationen in Mengen von Individuen	$\langle s, \langle e, t \rangle \rangle$	Menge von Individuen	$\langle e, t \rangle$

2-stelliges Prädikat der 1. Stufe

Intension	intensionaler Typ	Extension	extensionaler Typ
intensionale Relation als eine Funktion von Situationen in Mengen von Paaren von Individuen	$\langle s, \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \rangle$	Menge von Paaren von Individuen	$\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$

usw.

7.2 Intensionale Logik (IL)

Im Folgenden wird die von **Montague** in *PTQ* verwendete intensionale Logik (IL) rekonstruiert.

Dieses formale System kombiniert all die syntaktischen und semantischen Instrumentarien, die in den vorangehenden Kapiteln systematisch entwickelt worden sind.

Bei IL handelt es sich zunächst einmal um eine λ -Typenlogik, die die intensionalen Operatoren P , F , \diamond und \square enthält.

Als intensional können diese Operatoren jetzt insofern betrachtet werden, weil ihre Semantik nicht nur auf die jeweils aktuelle Situation, d.h. die aktuelle Zeit bzw. aktuelle Welt, sondern auf andere Situationen Bezug genommen wird.

Darüber hinaus wird der intensionale Charakter dieser Logiksprache durch eine Reihe weiterer Festlegungen bestimmt.

7.2.1 Syntax von IL

Die Menge T der Typen umfasst zusätzlich zu denen von $TL\lambda$ (vgl. D3.1) auch Typen, in deren Notation mindestens ein s vorkommt. Zu ihnen gehören speziell die Typen der Art $\langle s, a \rangle$.

D7.1 Typen von IL

- (1) $e \in T$.
- (2) $t \in T$.
- (3) Wenn $a, b \in T$, dann $\langle a, b \rangle \in T$.
- (4) Wenn $a \in T$, dann $\langle s, a \rangle \in T$.
- (5) Nichts sonst ist in T .

? Welche der folgenden Kombinationen sind Typen, welche nicht?
 $\langle s, \langle t, t \rangle \rangle$, $\langle s, \langle e, \langle e, \langle e, t \rangle \rangle \rangle \rangle$, $\langle t, \langle s, \langle e, t \rangle \rangle \rangle$, $\langle e, \langle t, s \rangle \rangle$, $\langle \langle s, \langle e, e \rangle \rangle, \langle s, t \rangle \rangle$

Zum Vokabular von $TL\lambda$ (vgl. D3.2) werden nicht nur die bereits bekannten Operatoren P , F , \diamond und \square , sondern auch **zwei neue Operatoren** hinzugefügt:

- der Intensor[^]
- der Extensor^v

Der **Intensor** $\hat{}$ – gelesen als „die Intension von“ – ist ein Operator, dessen Anwendung auf einen Ausdruck α einen Ausdruck $\hat{\alpha}$ liefert, der die **Intension** von α (in einer beliebigen Situation) denotiert.

Zum Beispiel wird aus einer Formel ϕ der Ausdruck $\hat{\phi}$ erzeugt.
Dabei handelt es sich um einen Ausdruck vom Typ $\langle s, t \rangle$; er denotiert die Intension von ϕ , d.h. eine Proposition.

Da der Intensor für beliebige Ausdrücke definiert ist, **kann** $\hat{}$ auch **iteriert** angewandt werden.

Der **Extensor** $\overset{\vee}{}$ – gelesen als „die Extension von“ – ist der zu $\overset{\wedge}{}$ konverse Operator.

Er ist also nur auf einen Ausdruck α anwendbar, der von einem intensionalen Typ ist, und liefert mit $\overset{\vee}{\alpha}$ einen Ausdruck, der die Extension von α (in einer bestimmten Situation) denotiert.

Zum Beispiel kann mit ihm aus $\overset{\wedge}{\phi}$ der Ausdruck $\overset{\vee}{\overset{\wedge}{\phi}}$ gebildet werden, der identisch mit ϕ und damit vom Typ t ist.

Der Extensor ist in diesem Sinne ein Annullierungsoperator; er lässt **keine iterierte** Anwendung zu.

Analog zu P , F , \diamond und \square sind auch \wedge und \vee von der Art, dass sich mit ihnen nur implizit auf mögliche Situationen, Inzides, mögliche Welten usw. bezogen wird.

D.h. erst bei der Interpretation der Ausdrücke erfolgt eine Bewertung mit Bezug auf entsprechende Parameter.

D7.2 Vokabular von IL

Das Vokabular von IL enthält:

- (1) für jeden Typ a eine Menge VAR_a von Variablen des Typs a :
 $v_{n,a}$ ($n \geq 1$),
- (2) für jeden Typ a eine Menge CON_a von Konstanten des Typs a :
 $c_{n,a}$ ($n \geq 1$),
- (3) die Konnektoren: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$,
- (4) das Identitätsprädikat: $=$,
- (5) die Quantoren: \forall, \exists ,
- (6) den Lambda-Operator: λ ,
- (7) die Tempusoperatoren: F, P ,
- (8) die Modaloperatoren: \Box, \Diamond ,
- (9) den Intensor: $\hat{}$,
- (10) den Extensor: $\check{}$,
- (11) die technischen Hilfszeichen: $(,), [,]$.

Syntaktische Regeln von IL

D7.3 Wohlgeformte Ausdrücke WFA von IL

- (1) Wenn $\alpha \in VAR_a$ oder $\alpha \in CON_a$, dann $\alpha \in WFA_a$.
- (2) Wenn $v \in VAR_a$ und $\alpha \in WFA_b$, dann $\lambda v[\alpha] \in WFA_{\langle a,b \rangle}$.
- (3) Wenn $\alpha \in WFA_{\langle a,b \rangle}$ und $\beta \in WFA_a$, dann $\alpha(\beta) \in WFA_b$.
- (4) Wenn $\phi, \psi \in WFA_t$, dann
 $\neg\phi, (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \rightarrow \psi), (\phi \leftrightarrow \psi) \in WFA_t$.
- (5) Wenn $\alpha, \beta \in WFA_a$, dann $(\alpha = \beta) \in WFA_t$.
- (6) Wenn $\phi \in WFA_t$ und $v \in VAR_a$, dann $\forall v[\phi], \exists v[\phi] \in WFA_t$.
- (7) Wenn $\phi \in WFA_t$, dann $\mathbf{F}\phi, \mathbf{P}\phi \in WFA_t$.
- (8) Wenn $\phi \in WFA_t$, dann $\Box\phi, \Diamond\phi \in WFA_t$.
- (9) Wenn $\alpha \in WFA_a$, dann $\wedge\alpha \in WFA_{\langle s,a \rangle}$.
- (10) Wenn $\alpha \in WFA_{\langle s,a \rangle}$, dann $\vee\alpha \in WFA_a$.
- (11) Nichts sonst ist in WFA .

Beispiel:

Es seien u.a. die folgenden speziellen Variablen und Konstanten angenommen:

Typ	Variablen	Konstanten
e	x, y, z	$Maria', Miss_Universum'$
$\langle s, e \rangle$	r	–
$\langle e, t \rangle$	P, Q	$laufen', schön', Abendstern',Fußballweltmeister'$
$\langle \langle s, e \rangle, t \rangle$	X	$wechseln'$
$\langle s, \langle e, t \rangle \rangle$	E	–

Typ	Variablen	Konstanten
$\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$	R	<i>finden'</i>
$\langle \langle s, e \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$	–	<i>suchen'</i>
$\langle \langle s, \langle e, t \rangle \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$		<i>ehemalig'</i>
$\langle s, t \rangle$	p	–
$\langle \langle s, t \rangle, t \rangle$	–	<i>notwendigerweise'</i> , <i>möglicherweise'</i>
$\langle \langle s, t \rangle, \langle e, t \rangle \rangle$	–	<i>glauben'</i> , <i>wissen'</i>

☐? Bestimme den Typ der folgenden wohlgeformten Ausdrücke von IL:

(1) $\lambda P[P(\vee^{\wedge} \textit{Maria} ')]$

(2) $\textit{wechseln}'(\wedge \textit{Miss_Universum} ')$

(3) $\wedge^{\vee} r$

(4) $\lambda E \lambda x[\textit{ehemalig}'(E)(x)]$

(5) $\lambda r[\textit{wechseln}'(r)]$

(6) $\textit{notwendigerweise}(p)$

(7) $\lambda y[\textit{suchen}'(\wedge \textit{Miss_Universum} ')(y)]$

(8) $\lambda p \lambda x[\textit{glauben}'(p)(x)]$

(9) $\lambda x[\textit{ehemalig}'(\wedge \textit{Fußballweltmeister} ')(x)]$

(10) $\lambda X[X = \textit{wechseln}']$

7.2.2 Semantik von IL

D7.4 Domänen der Typen von IL

- (1) $D_e = D$
- (2) $D_t = \{0,1\}$
- (3) Für beliebige Typen a, b gilt: $D_{\langle a,b \rangle} = D_b^{D_a}$.
- (4) Für einen beliebigen Typ a gilt: $D_{\langle s,a \rangle} = D_a^{W \times T}$.
- (5) Nichts sonst ist Domäne eines Typs von IL.

Die **Menge der möglichen Denotationen** eines beliebigen (intensionalen) Typs $\langle s, a \rangle$ ist als $D_{\langle s, a \rangle} = D_a^{W \times T}$ definiert.

Dabei handelt es sich bei $D_a^{W \times T}$ um die Menge der Funktionen von $W \times T$, d.h. der Menge der Indizes $\langle w, t \rangle$ (mit $w \in W$ und $t \in T$) in die Menge der möglichen Denotationen von a am jeweiligen Index $\langle w, t \rangle$.

Genauer gesagt ist damit $D_{\langle s, a \rangle}$ die Menge der **möglichen Intensionen** des Typs a .

D7.5 Intensionales Modell von IL

Ein intensionales Modell M von IL ist ein geordnetes Quintupel $\langle D, W, T, <, I \rangle$, wobei

- (i) D die Diskursdomäne ist,
- (ii) W eine (nicht-leere) Menge von möglichen Welten ist,
- (iii) T eine (nicht-leere) Menge von Zeitpunkten ist,
- (iv) $<$ eine Ordnungsrelation auf T ist und
- (v) I die Interpretationsfunktion von M ist, die jeder nicht-logischen Konstanten vom Typ a eine Denotation aus $D_{\langle s,a \rangle}$ zuweist.

Die **Interpretationsfunktion** I ordnet also anders als bisher den nicht-logischen Konstanten passende **Intensionen** zu.

Beispielsweise werden den Konstanten vom Typ e nicht mehr Elemente aus D_e , sondern Elemente aus $D_{\langle s,e \rangle}$, d.h. **Individuenkonzepte** als **Denotationen** zugewiesen.

Gegenüber einem Index-Modell (vgl. D6.4) ist damit I von einer Funktion von **zwei** Argumenten – einem Ausdruck α und einem Index $\langle w, t \rangle$ – zu einer Funktion von nur **einem** Argument – einem Ausdruck α – verändert worden.

Dabei ist der jeweils zugeordnete Wert $I(\alpha)$ selbst wieder eine Funktion, nämlich eine Funktion von Indizes $\langle w, t \rangle$ in passende **Denotationen** von α **am Index**.

Unter anderem gilt:

- (i) Wenn α eine Konstante vom Typ e ist, dann ist $I(\alpha)$ eine Funktion von $W \times T$ in D , so dass für jedes $w \in W$ und $t \in T$ gilt: $I(\alpha)(\langle w, t \rangle) \in D$;
- (ii) wenn α eine Konstante vom Typ $\langle e, t \rangle$ ist, dann ist $I(\alpha)$ eine Funktion von $W \times T$ in $\mathcal{P}(D)$, so dass für jedes $w \in W$ und $t \in T$ gilt: $I(\alpha)(\langle w, t \rangle) \subseteq D$;
- (iii) wenn α eine Konstante vom Typ $\langle e, \langle e, t \rangle \rangle$ ist, dann ist $I(\alpha)$ eine Funktion von $W \times T$ in $\mathcal{P}(D^2)$, so dass für jedes $w \in W$ und $t \in T$ gilt: $I(\alpha)(\langle w, t \rangle) \subseteq D^2$;

usw.

In diesem Sinne haben wir es jetzt mit einem zweistufigen Verfahren der Interpretation zu tun.

Dagegen behält die Variablenbelegungsfunktion ihren bisherigen Charakter bei.

D7.6 Eine **Variablenbelegung** g von IL ist eine Funktion, die jeder Variablen vom Typ a eine Denotation aus D_a zuweist.

Beispiele:

(1) Angenommen, es gilt:

$$I(Maria') = \left[\begin{array}{l} \langle w_0, t_0 \rangle \rightarrow Maria \\ \langle w_0, t_1 \rangle \rightarrow Maria \\ \langle w_0, t_2 \rangle \rightarrow Maria \\ \dots \\ \langle w_1, t_0 \rangle \rightarrow Maria \\ \langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow Maria \\ \dots \end{array} \right]$$

Damit wird $Maria'$ – einer Konstanten vom Typ e – eine Intension zugeordnet, die für den Ausdruck an den Indizes $\langle w_0, t_0 \rangle, \langle w_0, t_1 \rangle$ usw. konstant die Extension Maria ergibt.

D.h. es gilt unter anderem:
 $I(Maria')(\langle w_0, t_0 \rangle) = Maria$

(2) Angenommen, es gilt:

$$I(\textit{laufen}') = \left[\begin{array}{l} \langle w_0, t_0 \rangle \rightarrow \{\textit{Maria, Hans}\} \\ \langle w_0, t_1 \rangle \rightarrow \{\textit{Maria, Peter}\} \\ \langle w_0, t_2 \rangle \rightarrow \{\textit{Maria}\} \\ \dots \\ \langle w_1, t_0 \rangle \rightarrow \emptyset \\ \langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow \{\textit{Hans}\} \\ \dots \end{array} \right]$$

Damit wird *laufen'* – einer Konstanten vom Typ $\langle e, t \rangle$ – eine Intension zugeordnet, die für den Ausdruck am Index $\langle w_0, t_0 \rangle$ die Extension $\{\textit{Maria, Hans}\}$, am Index $\langle w_0, t_1 \rangle$ die Extension $\{\textit{Maria, Peter}\}$ usw. ergibt.

Ausgehend von den durch I und g vorgenommenen Zuordnungen zu den nicht-logischen Grundausdrücken sollen nun wieder entsprechende Zuordnungen zu beliebig komplexen Ausdrücken bestimmt werden können.

Hierzu müssen wir zunächst einmal für die beiden Arten der Denotation die Notationsweisen mit Bezug auf ein intensionales Modell und eine Variablenbelegung einführen.

Notation:

$[[\alpha]]^{M,w,t,g}$: die Extension von α relativ zu dem Modell M ,
der möglichen Welt w ,
dem Zeitpunkt t und
der Variablenbelegung g

$[[\alpha]]^{M,g}$: die Intension von α relativ zu dem Modell M und
der Variablenbelegung g

Semantische Regeln von IL

Die semantischen Regeln von IL legen parallel zu den syntaktischen Regeln von IL für jeden Typ a die Extension eines beliebigen Ausdrucks $\alpha \in WFA_a$ fest.

D7.7 Extension eines wfA von IL bzgl. M, w, t und g

- (1) (a) Wenn $\alpha \in CON_a$, dann $\llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} = I(\alpha)(\langle w, t \rangle)$.
(b) Wenn $\alpha \in VAR_a$, dann $\llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} = g(\alpha)$.
- (2) Wenn $v \in VAR_a$ und $\alpha \in WFA_b$, dann ist $\llbracket \lambda v [\alpha] \rrbracket^{M,w,t,g}$ diejenige Funktion h von D_a in D_b , so dass für jedes $d \in D_a$ gilt:
$$h(d) = \llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g[v \rightarrow d]}.$$
- (3) Wenn $\alpha \in WFA_{\langle a,b \rangle}$ und $\beta \in WFA_a$, dann
$$\llbracket \alpha(\beta) \rrbracket^{M,w,t,g} = \llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} (\llbracket \beta \rrbracket^{M,w,t,g}).$$

Extension eines wFA von IL bzgl. M, w, t und g (Fortsetzung)

(4) Wenn $\phi, \psi \in WFA_t$, dann

(a) $\llbracket \neg \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 0$,

(b) $\llbracket \phi \wedge \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = \llbracket \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$,

(c) $\llbracket \phi \vee \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ oder $\llbracket \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$,

(d) $\llbracket \phi \rightarrow \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 0$ oder $\llbracket \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$,

(e) $\llbracket \phi \leftrightarrow \psi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = \llbracket \psi \rrbracket^{M,w,t,g}$.

(5) Wenn $\alpha, \beta \in WFA_a$, dann $\llbracket \alpha = \beta \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw
 $\llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} = \llbracket \beta \rrbracket^{M,w,t,g}$.

Extension eines wfA von IL bzgl. M, w, t und g (Fortsetzung)

(6) Wenn $\phi \in WFA_t$ und $v \in VAR_a$, dann

(a) $\llbracket \forall v[\phi] \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw für jedes $d \in D_a$ gilt: $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g[v \rightarrow d]} = 1$,

(b) $\llbracket \exists v[\phi] \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw es mindestens ein $d \in D_a$ gibt,
so dass gilt: $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t,g[v \rightarrow d]} = 1$.

(7) Wenn $\phi \in WFA_t$, dann

(a) $\llbracket P\phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw es einen Zeitpunkt t' mit $t' < t$ gibt,
so dass $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t',g} = 1$,

(b) $\llbracket F\phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw es einen Zeitpunkt t' mit $t < t'$ gibt,
so dass $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w,t',g} = 1$.

Extension eines wfA von IL bzgl. M, w, t und g (Fortsetzung)

(8) Wenn $\phi \in WFA_t$, dann

(a) $\llbracket \diamond \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw es eine Welt $w' \in W$ und einen Zeitpunkt $t' \in T$ gibt, so dass $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w',t',g} = 1$,

(b) $\llbracket \square \phi \rrbracket^{M,w,t,g} = 1$ gdw für jede Welt $w' \in W$ und jeden Zeitpunkt $t' \in T$ gilt: $\llbracket \phi \rrbracket^{M,w',t',g} = 1$.

(9) Wenn $\alpha \in WFA_a$, dann ist $\llbracket \wedge \alpha \rrbracket^{M,w,t,g}$ diejenige Funktion h von $W \times T$ in D_a , so dass für jedes $\langle w', t' \rangle \in W \times T$ gilt:

$$h(\langle w', t' \rangle) = \llbracket \alpha \rrbracket^{M,w',t',g}.$$

(10) Wenn $\alpha \in WFA_{\langle s,a \rangle}$, dann $\llbracket \vee \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} = \llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g}(\langle w, t \rangle)$.

Auf dieser Basis kann nun definiert werden, was die Intension eines beliebigen Ausdrucks von IL ist.

D7.8 Intension eines wfA von IL bzgl. M und g

Wenn $\alpha \in WFA_a$, dann ist $\llbracket \alpha \rrbracket^{M,g}$ diejenige Funktion h von $W \times T$ in D_a , so dass für jedes $\langle w, t \rangle \in W \times T$ gilt:
$$h(\langle w, t \rangle) = \llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g}.$$

Damit gilt für jeden Ausdruck α , jede mögliche Welt w und jeden Zeitpunkt t :

$$\llbracket \alpha \rrbracket^{M,g} (\langle w, t \rangle) = \llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g}$$

D.h. die Intension eines Ausdrucks α relativ zu M und g liefert für jeden Index $\langle w, t \rangle$ die Extension von α relativ zu M , w , t und g .

Außerdem gilt auf Grund von **D7.8** und von (9) aus **D7.7** für jeden Ausdruck α , jede mögliche Welt w und jeden Zeitpunkt t :

$$\llbracket \alpha \rrbracket^{M,g} = \llbracket \hat{\alpha} \rrbracket^{M,w,t,g}$$

D.h. die Intension eines Ausdrucks α relativ zu M und g ist identisch mit der Extension von $\hat{\alpha}$ relativ zu M , w , t und g .

Schließlich gilt unter zusätzlicher Berücksichtigung von (10) aus **D7.7** für jeden Ausdruck α , jede mögliche Welt w und jeden Zeitpunkt t :

$$\llbracket \alpha \rrbracket^{M,w,t,g} = \llbracket \forall \alpha \rrbracket^{M,w,t,g}$$

Die Extension eines Ausdrucks α relativ zu M , w , t und g ist also identisch mit der Extension von $\forall \alpha$ relativ zu M , w , t und g .

Wegen (5) aus **D7.7** gilt damit auch die folgende logische Identität:

$$\models \forall \alpha = \alpha$$

D.h. das durch $\forall \alpha$ Bezeichnete ist stets mit dem durch α allein Bezeichneten identisch.

Beispiele:

(1) Angenommen, es gilt:

$$I(\textit{Maria}') = \begin{bmatrix} \langle w_0, t_0 \rangle \rightarrow \textit{Maria} \\ \langle w_0, t_1 \rangle \rightarrow \textit{Maria} \\ \langle w_0, t_2 \rangle \rightarrow \textit{Maria} \\ \dots \\ \langle w_1, t_0 \rangle \rightarrow \textit{Maria} \\ \langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow \textit{Maria} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Damit gilt auf Grund von **D7.8** : $\llbracket \textit{Maria}' \rrbracket^{M,g} = I(\textit{Maria}')$.

(2) Angenommen, es gilt:

$$I(\textit{laufen}') = \left[\begin{array}{l} \langle w_0, t_0 \rangle \rightarrow \{\textit{Maria, Hans}\} \\ \langle w_0, t_1 \rangle \rightarrow \{\textit{Maria, Peter}\} \\ \langle w_0, t_2 \rangle \rightarrow \{\textit{Maria}\} \\ \dots \\ \langle w_1, t_0 \rangle \rightarrow \emptyset \\ \langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow \{\textit{Hans}\} \\ \dots \end{array} \right]$$

Damit gilt auf Grund von **D7.8** : $\llbracket \textit{laufen}' \rrbracket^{M,g} = I(\textit{laufen}')$.

(3) Wegen (1) und (2) sowie auf Grund von (3) aus **D7.7** und von **D7.8** gilt dann auch:

$$\llbracket \textit{laufen}'(\textit{Maria}') \rrbracket^{M,g} = \begin{bmatrix} \langle w_0, t_0 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle w_0, t_1 \rangle \rightarrow 1 \\ \langle w_0, t_2 \rangle \rightarrow 1 \\ \dots \\ \langle w_1, t_0 \rangle \rightarrow 0 \\ \langle w_1, t_1 \rangle \rightarrow 0 \\ \dots \end{bmatrix}$$

Übungen

Ü7.1 – Ü7.2

Termin: nächstes Tutorium