

# Einführung in die Didaktik der Mathematik

Prof. Dr. Michael Toepell

Institut für Grundschulpädagogik  
der Universität Leipzig

## Inhalt des Vorlesungsskripts

	Seite
A. Einleitung .....	1
B. Beginn des Rechenunterrichts .....	5
C. Die Rechenoperationen .....	7
D. Gedächtnisbildung .....	9
E. Rechenschwächen .....	11
F. Ziele, Aufgaben und Bedeutung des Mathematikunterrichts .....	12
G. Geschichte des Mathematikunterrichts .....	15
H. Prinzipien des Mathematikunterrichts .....	20
I. Unterrichtsplanung .....	22
J. Zahlbegriff .....	27
K. Größen und Sachaufgaben .....	29
L. Einige Grundlagen der Grundschulmathematik.....	32
M. Aufgabensammlung zur elementaren Schulmathematik.....	33
N. Das Böhmisches Dorf.....	43

5. Auflage WS 2005/06

© 2004 Universität Leipzig  
nach den Vorlesungen des Verfassers an der Universität Leipzig  
Layoutidee: Swen Linke

Dieses Script ist kein Ersatz für die Teilnahme an den Vorlesungen, es soll den Studentinnen und Studenten eine Hilfestellung beim Nacharbeiten und Ergänzen der Stofffülle leisten. Für die Richtigkeit des Inhalts wird keine Haftung übernommen!

## A. Einleitung

### 1. Mathematikunterricht im Wandel

**Aufgabe der Erziehung** bzw. Bildung ist die **Eingliederung** des Individuums in den richtig verstandenen gesamten Entwicklungsprozeß der Menschheit nach Maßgabe der im Individuum liegenden besonderen Anlagen.

Wie die Geschichte des **Mathematikunterrichts** zeigt (siehe Kapitel G), gab es immer wieder Zeiten tiefgreifender methodisch-didaktischer Veränderungen. Mitte der 1960er bis Mitte der 80er Jahre war die Schulmathematik geprägt von einer Orientierung am formalen Aufbau der Mathematik. Seit den 90er Jahren unterliegt der Mathematikunterricht einem weiteren **spürbaren Wandel**. Zwei grundlegende Richtungen bestimmten die Neugestaltung der Lehrpläne in dem Jahrzehnt um die Zeit der "Wende", um 1990:

- 1.) Betonung des **fachübergreifenden** Unterrichts
- 2.) Betonung des **Erziehungsauftrags** der Schule

Diese beiden Richtungen erleben gegenwärtig einen beziehungsreichen Ausbau. Welche Perspektiven ergeben sich dabei - insbesondere durch und nach den PISA-Studien?

### 2. Ein Blick über den Zaun: Die PISA-Vorbilder Finnland und Schweden

- 1.) Das **Einschulungsalter** liegt bei 7 Jahren;
- 2.) **Fremdsprachen** werden bereits in der 1. bis 3. Klasse eingeführt;
- 3.) Es werden **kaum** Hausaufgaben gegeben.
- 4.) **Klassenlehrer** führen die Klassen bis Klasse 6 einschließlich.
- 5.) Bis einschließlich Klasse 8 gibt es in Schweden **keine Noten**.
- 6.) Es gibt **kein ‚Sitzen-bleiben‘**, d.h. es werden reine Jahrgangsklassen geführt.
- 7.) Es gibt **kaum** Nachhilfeunterricht.
- 8.) Die Klassen werden ohne Sonderung bis einschließlich Klasse 9 geführt; es gibt bis dahin **kein gegliedertes Schulsystem**.
- 9.) Ein anschließendes Kurssystem wird von etwa 95 % der Schüler in Finnland besucht; das freiwillige Gymnasium besuchen in Schweden ca. 98%;
- 10.) Diese Schulsysteme **vermeiden Selektion und Deklassierung** der Schwächeren. Für fast **alle** Schüler gibt es eine 12-13 Jahre umfassende Schulbildung. Damit ergibt sich eine **soziale Homogenisierung** durch langen sozialen Zusammenhalt der Jahrgangsklassen und keine soziale Segregation.
- 11.) Die Schulen haben eine relativ große **Autonomie**; sie sind nicht staatlich reglementiert, Träger sind meist die Kommunen.
- 12.) Lehrer haben mehr **Eigenverantwortlichkeit**.
- 13.) Die Lehrer werden um ein Drittel **schlechter bezahlt** als in Deutschland und sind **nicht** verbeamtet;
- 14.) Dennoch ist ihr gesellschaftliches **Ansehen weit höher** als in Deutschland.

### 3. Mögliche Folgerungen - künftige Perspektiven

- Mehr Autonomie für die Schulen, mehr Eigenverantwortlichkeit für die Lehrer.
- Engagement soll sich lohnen und Anerkennung finden.
- Kreatives Unterrichten, mehr Muße, weniger Selektionsdruck, Freude am Lernen.
- Experimentieren und Gestalten sind nur möglich bei einer weitgehenden Reduktion staatlicher Normierungen, die etwa auch durch zentrale Prüfungen erzwungen werden.

#### 4. Gründe für das Ergebnis von PISA in Deutschland

- Kritik am Verfahren der PISA- Studie; Aufgabenstellungen
- deutscher Mathematikunterricht mehr an Inhalten, Stoffgebieten orientiert (es wird vor allem gerechnet) - bei PISA ging es mehr um mathematisches Verständnis, um den kreativen Umgang, das Modellieren
- Art der Unterrichtsführung (Lehrer zentriert, fragend/ entwickelnd)
- Gerd Fischer: Schüler reicher Länder weniger motiviert, sich im MU anzustrengen

#### 5. Lehren und Lernen verläuft im MU zwischen zwei Extrempositionen

- dem traditionellen Lernen durch **Belehrung**, durch Instruktion und
- dem Lernen durch gelenkte **Entdeckung**, durch eigenständige Konstruktion

Lernen durch Belehrung	Lernen durch gelenkte Entdeckung
Lehrer orientiert Lernziel <b>möglichst eng</b> am Stoffkontext.	Lehrer bietet <b>herausfordernde, lebensnahe</b> und reich strukturierte Situationen an.
Lehrer erarbeitet den neuen Stoff durch <b>Darbietung</b> oder gelenktes Unterrichtsgespräch.	Lehrer <b>ermuntert</b> die Schüler zum Beobachten, Erkunden, Probieren, Vermuten, Fragen.
Lehrer gibt Hilfen als Hilfen zur Produktion der <b>gewünschten Antwort</b> .	Lehrer gibt Hilfen als Hilfen zum <b>Selbstfinden</b> .
Lehrer setzt auf Methoden der <b>Vermittlung</b> .	Lehrer setzt auf die <b>Neugier</b> und den <b>Wissensdrang</b> der Schüler.
Lehrer ist bestrebt, <b>allein</b> die Verantwortung zu tragen.	Lehrer betrachtet die Schüler als <b>Mitverantwortliche</b> im Lernprozess.
Lehrer strukturiert den Stoff durch <b>kleine Lernschritte</b> und betont eher Separationen und <b>Isolationen</b> der Inhalte voneinander.	Lehrer versucht dem <b>Beziehungsreichtum</b> mathematischer Sachverhalte Rechnung zu tragen.

#### 6. Die fünf Funktionen des Freihand-Formenzeichnens in der Grundschule

Das Formenzeichnen, die Welt der Formen bildet einen ersten Einstieg in die Geometrie und ermöglicht sehr komplexe Angebote, die Beweglichkeit, kreatives Denken und (gemeinsames) künstlerisches Gestalten fördern und fordern.

- 1.) **Propädeutische** Funktion im Hinblick auf geometrische Formen (z.B. Ortskurven in den Jahrgangsstufen 7 bis 9) und das Schreibenlernen von Buchstaben und Ziffern.
- 2.) **Entwicklungspsychologische** Funktion im Hinblick auf spätere kognitive Fähigkeiten. Kann auch für **therapeutische** Zwecke eingesetzt werden. Die *Bewegungsentwicklung* beeinflusst die späteren kognitiven Fähigkeiten. Das Formenzeichnen fördert die Fähigkeit des Kindes zu einer *innerlich regsamen Formauffassung*, so daß die ebene GS-Geometrie im Zusammenhang gesehen werden kann mit allgemeineren Formen (Ellipsen, Sternformen, Spiralen, etc.).
- 3.) **Motorische** Funktion bildet einen geeigneten Ausgleich gegenüber der Tätigkeit am Computer. Nachteil des Computers: Die motorischen Fähigkeiten bleiben *auf der Strecke*. Es ist hier nicht nur für einen *grobmotorischen* Ausgleich, wie etwa das Formenlaufen, sondern auch für einen *feinmotorischen* Ausgleich zu sorgen.

- 4.) **Ästhetische** Funktion im Hinblick auf das geometrische Empfinden und Formgefühl. Ist eher erlebnisorientiert als das mechanische Zeichnen mit Hilfsmitteln. Die Form als selbständige Qualität und ihre Gesetzmäßigkeit, also das Dreieck als Dreieck, den Kreis als Kreis, erfaßt das Kind erst dann, wenn ihm das *Nachbilden* als eigene Tätigkeit zum Bewußtsein kommt.
- 5.) **Geometrische** Funktion: wirkt einer künstlichen Beschränkung der Geometrie auf lineare Formen entgegen. Formenzeichnen wird der *Vielfalt* der Geometrie z.B. in Architektur, Kunstgeschichte, Maschinenbau, Handwerk, Verkehr und Biologie eher gerecht.

Ideal: Formen zu schaffen als Ausdruck des inneren Lebens.

## 7. Grundlegende Perspektiven für den heutigen Mathematikunterricht

- Fachübergreifender und projektorientierter Unterricht
- Vernetzung von mathematischen Sachaufgaben mit der Förderung von Lesekompetenz
- Lernen mit Hand, Herz und Kopf
- Lernen mit allen Sinnen
- Vertrauliche Zusammenarbeit mit den Eltern
- Kooperierendes Arbeiten von Schülern in Partner- und Gruppenarbeit
- Daraus hervorgehende grundlegende Aufgaben:
  - Unterstützung des Schülers in seiner Umwelt
  - Beziehungen zwischen Arithmetik (Zahl) und Geometrie (Form) berücksichtigen
  - Entwicklung und Bedürfnisse der Kinder berücksichtigen

## 8. Voraussetzungen für offenen Mathematikunterricht

- solides Fachwissen der GS-Lehrer zur Schulmathematik der Klassen 5 bis 8
- Nutzung von Fortbildungsangeboten
- Lehrpläne sind Rahmenpläne, die sich auf das Wesentliche beschränken
- Exemplarisches Lernen ist durch offenere Lehrpläne möglich
- Sicherung der Grundaufgaben und Grundrechenarten
- Nutzung der Vorteile des rhythmisch-musikalischen Arbeitens und des formorientiert bildnerischen Arbeitens
- Häufigeres Abschätzen von Resultaten; auch jeweils Probe
- Schönheit und Ästhetik in der Mathematik

## 9. Möglichkeiten einer schülergemäßen Differenzierung

- Differenzierte Unterrichtsgestaltung: abwechslungsreicher Unterrichtsaufbau mit Frontalphasen, offenen Unterrichtsabschnitten und Motivationsphasen
- weniger Förderung von Ehrgeiz und Selektion, sondern von Zusammenarbeit der Schüler, gegenseitiges Lernen und Helfen; unterstützt zugleich Kommunikations- und Teamfähigkeit
- differenzierte Hausaufgaben: verschiedene Schwierigkeitsgrade, Pflicht- und Wahlanteile
- Schüler entwerfen selbständig angemessene Aufgaben
- Differenzierung durch offenen Unterrichtsformen unterstützt den integrativen Gedanken
- Selbstständigkeit
- Entdeckendes Lernen ist problemorientiertes Lernen

- insgesamt mehr problemorientiertes als algorithmisches Arbeiten
- Schaffen von Situationen, die zu selbständigem Lernen und beweglichem Denken animieren
- Häufigeres Skizzieren beim Problemlösen (geometrische Veranschaulichung von Zusammenhängen)
- Die Planung von Lösungswegen ist mindestens so entscheidend wie das anschließende Ausrechnen.
- Anerkennung von Abstraktionsvermögen, Vorstellungskraft, Phantasie und der Gabe zum Querdenken
- Zulassen verschiedener Lösungswege
- Behutsame und bewusste Nutzung der neuen Medien

## B. Beginn des Mathematikunterrichts

### 1. Erste Unterrichtsstunden

1. Warum geht Ihr zur Schule? (Vorkenntnisse der Kinder herausfinden)
  - Kinder wollen lernen
  - wollen Fähigkeiten der Erwachsenen besitzen (lesen  $\leftrightarrow$  schreiben, rechnen  $\leftrightarrow$  mathematisieren, gestalten, evtl. Fremdsprachen)
2. Praktische Übungen knüpfen an Erfahrungen aus Kindergarten u. Vorschule an!
  - motorische Bewegungen (Lehrer(in) Vorbild, Kinder: Nachahmung)
  - Freihandzeichnen von Formen
  - Gründe für das Formenzeichnen: siehe *Funktionen des Freihand-Formenzeichnens* (Kap. A.6)
  - z.B. Schulung der Feinmotorik als Voraussetzung der Schriftentwicklung
3. Grundformen:
  - Gerade Linie (Aristoteles: *Gerade* ist Urform der irdischen Bewegung)
  - Krumme Linie (Aristoteles: *Kreis* ist Urform der göttlichen Bewegung)
4. Aus Formen Buchstaben und Bilder entwickeln
  - Kinder können abstrakte Form an lebendiger Form herleiten
  - Verbindung von Form mit Qualität, d.h. effektives Lernen
  - Rechnen erst nach dem Formenzeichnen beginnen

### 2. Einführung der ersten Zahlen

1. Klären des Zahlenbegriffs (individuell)
  - durch Teilen erklären
  - Entwicklung aus der Einheit als elementarem Prozess
2. Rechnen
 

1 entspricht	Stock
2 entspricht	Stöcke (1 zerbrochen)
3 entspricht	Papa, Mama, Kind (Familie)
4 entspricht	Beine des Hundes
5 entspricht V	Hand (bzw. Finger)

→ arabische Zahlen

### 3. Zahlen und Rhythmus

Zahlenaspekt


- Berücksichtigen des Zeitlichen (Zeitgestalt der Zahl)

"Rhythmus schafft Ausgleich zwischen Handeln und Denken" (Hand, Kopf)

- Zahlen aus der zeitlichen Komponente entwickeln (musikalisches Erleben): Klatschen, Stampfen, Tanzen
- Zahlen bis 20 klatschen lassen (Kinder können das i.d.R.), manche Kinder sind evtl. nur in der Lage, bis 6 oder 7 zu zählen ... weiter beobachten, evtl. liegt Rechenschwäche vor
- Rhythmische Zahlenarbeit – Körperbewegungen fördern auch den Gleichgewichts- und Orientierungssinn

### 4. Einführung der indisch-arabischen Ziffern

- Schreibübungen, schönste Ziffern kennzeichnen
- Zahlenraten (Lernen) mit allen Sinnen (Hörsinn, Tastsinn, Geschmackssinn, Geruchssinn, Gleichgewichtssinn, Sehsinn, Wärmesinn)
  - Hörsinn: Trommel, Klanghölzer  $\Rightarrow$  Anzahl der Töne
  - Tastsinn: Holzzahlen fühlen, Anzahl der Steine ertasten
  - Geschmackssinn: Speiseprouben (Bananenstücke zählen)
  - Sehsinn: Bild an der Tafel, Rechenstäbchen, Verbindung  $\Rightarrow$  Veranschaulichung
- Zahl ist ein verinnerlichtes Bewegungserlebnis
- Zahl ist abstrakt
- Erste Schwierigkeit: Zehnerübergang

Hilfe: 1  (ein Säckchen voll)  
11 (ein Säckchen voll und ein neues angefangen)  
43 (4 Säckchen voll und 3 im neuen angefangenen)

Zur Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern (die die römischen erst allmählich ablösten) und der damit verbundenen Stellenwertschreibweise in Mitteleuropa hat um 1500 ALBRECHT DÜRER (Nürnberg) wesentlich beigetragen.

-----

### Sachaufgaben-Exkurs: Hungersnot in der Welt

Generalkonsul a.D. MICHAEL ENGELHARDT behauptet:

"Eine 10prozentige Kürzung der Militärausgaben des Westens würde ausreichen, um die für die Bekämpfung der Hungersnot nötigen Geldmittel beizuschaffen."

Man schätze ab, inwiefern diese Möglichkeit realistisch ist!

*Abschätzung:*

Dt. Bundeshaushalt 300 Mrd. € p.a., davon ca. 10% für Militärausgaben: 30 Mrd. € p.a.

Militärausgaben in den USA: 400 Mrd. \$ p.a.

Schätzung ges. Militärausgaben des Westens: 600 Mrd. € p.a.; davon sind 10 % ca. 60 Mrd. €.

Auf ca. 1 Mrd. hungernde Personen verteilt, wären das

60 Mrd. € : 1 Mrd. = 60 € pro Person p.a.; das entspricht  $60 \text{ €} : 365 \approx -,16 \text{ €}$  pro Person /Tag (entspricht den Erzeugerkosten von gut einem Pfund Getreide bzw. Brot)

## C. Die Rechenoperationen

### 1. Einführung der ersten Rechenoperationen in der ersten Klasse

Zugang zu Addition über

- Aufteilen/Gliedern (ergänzend): analytischer Vorgang
- Zusammensetzen (traditionell): synthetischer Vorgang

analytischer Vorgang:	$\frac{5}{4+1}$	;	$\frac{7}{1+5+1}$	;	$\frac{16}{8+8}$
	$3+2$		$3+4$		$4+4+4+4$
	$2+3$		$2+3+2$		$3+4+2+4+3$
			$1+2+1+2+1$		$1+2+3+4+3+2+1$

"Element der Freiheit" (mehrere Lösungen sind richtig) – "schöne" Aufteilungen

Bemerkungen zur:

Addition	$7 + 5 = 12$	$5 + 7 = 12$	
	$p + a = r$	$p + a = r$	
Unterschiedsbildung	$7 + ? = 12$	$p + a = r$	$p = \text{passive Zahl}$
	$? + 5 = 12$	$p + a = r$	$a = \text{aktive Zahl}$
			$r = \text{Resultat}$
Subtraktion	$? + 5 = 12 \Leftrightarrow ? = 12 - 5$	$p + a = r \Leftrightarrow p = r - a$	
Multiplikation	$r = p + p + p + p + \dots + p$ (a-mal)		
	Bsp: $40 = 5 + 5 + 5 + \dots + 5$ (8-mal)		
	$= 5 \cdot 8$		
	$= 8 \cdot 5$		
	$r = a \cdot p$		
Messung (Verhältnisbildg.)	$15 \text{ m} : 3 \text{ m} = 5$	$r : p = a ?$	
Division	$15 \text{ m} : 5 = 3 \text{ m}$	$r : a = p ?$	
Potenzieren	$5^3 = 125$ oder $3^4 = 81$	$p^a = r$	
Logarithmieren	$\log_5 125 = 3$ oder $\log_3 81 = 4$	$\log_p r = a$	
Radizieren	$\sqrt[3]{125} = 5$ oder $\sqrt[4]{81} = 3$	$\sqrt[a]{r} = p$	

Erarbeiten an wechselnden Materialien, z.B. Naturmaterialien, Zahlenraten, Fingerzählen, Geschichten aus dem alltäglichen Leben

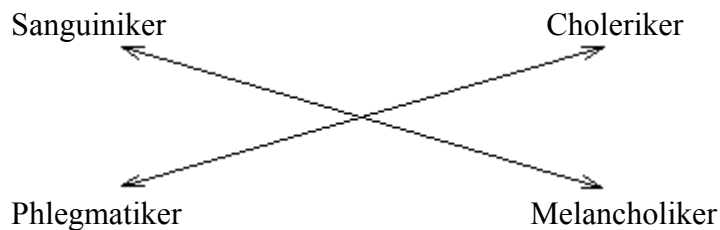
## 2. Übersicht über die neun Rechenoperationen

Aktive Umkehrung	Operation	Passive Umkehrung
Subtraktion $r - a = p$	<b>Addition</b> $p + a$	Unterschiedsbildung $r \mid a = p$
Division $r/a = p$	1. Steigerung <b>Multiplikation</b> $a \cdot p = r$	Verhältnissbildung $r : p = a$
Radizieren $\sqrt[a]{r} = p$	2. Steigerung <b>Potenzieren</b> $p^a = r$	Logarithmieren $\log_p r = a$

Man gebe jeweils ein Beispiel an!  
Welche Operationen lassen sich geometrisch veranschaulichen?

## 3. Rechenoperationen und Temperamente

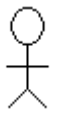
HIPPOKRATES VON KOS (460 - 377 v. Chr.; griech. Arzt; Gesundheit  $\Leftrightarrow$  Gleichgewicht, setzte auf Heilkraft der Natur) hat vier menschliche Temperamente unterschieden:



Ist ein Zusammenhang zwischen Grundrechenarten und Temperamenten denkbar?

- Addieren: Phlegmatiker
- Subtrahieren: Melancholiker
- Multiplizieren: Sanguiniker
- Dividieren: Choliker


#### 4. Beispiel für eine bildhafte Einführung der Rechenzeichen

5  7 ⇒ Männchen nimmt beide Zahlen und zieht sie zusammen

$$5 + 7$$

12 ~~5~~ 5 ⇒ Bäuerin: Fuchs hat 5 Gänse geklaut; nur noch der Schwanz ist zu sehen

$$12 - 5$$

4  3 ⇒ 4 Schritte à 3 Steine

$$4 \times 3$$

12  3 ⇒ über Steine springen (Beispiel Bach)

$$12 : 3$$

### D. Gedächtnisbildung

Bundespräsident HORST KÖHLER auf seiner Antrittsrede (23.5.2004) vor dem Bundestag:  
 "Deutschland sollte ein Land der Ideen werden!"

#### 1. Gedächtnisformen

- **Lokales** Gedächtnis (Orte an denen etwas stattgefunden hat, rufen diese Erinnerungen wach)
- **Rhythmisches** Gedächtnis (z. B. Gedicht, fällt Zeile für Zeile das nächste ein)
- **Kopf-** bzw. (Kurz- und Lang-) **Zeitgedächtnis** (z. B. Ziel beim Erlernen des Einmaleins/ Einspluseins, nützlich für Kopfrechnen, Instrument spielen, ...)

Hinweis:

- JEAN PIAGET: Psychologie der Intelligenz. 1974
- PESTALOZZI: Lernen mit Kopf, Herz und Hand

#### Grundaufgaben:

Einführung des <b>Einspluseins</b>	1 + 1; 1 + 2; 1 + 3; ...	; 1 + 9
durch additives Gliedern und	2 + 1; 2 + 2; ....	; 2 + 9
anschließendes Zusammenfassen	3 + 1; ....	; 3 + 9
der Zahlen von 2 bis 18.	...	...
	9 + 1; ....	; 9 + 9

**Beispiele:**

$\frac{7}{1+6}$   
 $2+5$   
 $3+4$   
 $4+3$   
 $5+2$   
 $6+1$

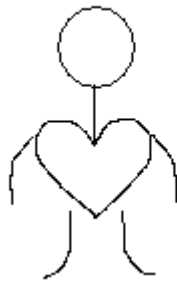
Zehnerübergang:

$$7 + 8 = 7 + (3 + 5) = (7 + 3) + 5 = 10 + 5 = 15$$

3. Kopf

2. Herz

1. Hand



Einmaleins

Freie Beweglichkeit in der Zahlenreihe

Rhythmisches Sprechen

Rhythmische Bewegung und Sprache

- 1.) rhythmische Vielfachreihen, chronisches Sprechen, hüpfen dazu, vorwärts/ rückwärts sprechen
- 2.) wird aus dem rhythmischen Gedächtnis heraus entwickelt, Sprechen einzeln, im Chor (rhythmisches Gedächtnis)
- 3.) "unregelmäßiges" Sprechen außerhalb geordneter Zahlenreihen (Kopfgedächtnis)

**2. Kleines Einmaleins**

- (1) Fähigkeit zu zählen
- (2) Rhythmisches Zählen
- (3) Beweglichkeit innerhalb einer Zahlenreihe
- (4) Behandlung der Multiplikation
- (5) Einführung der Einmaleinsreihen
- (6) Freie Beweglichkeit zwischen verschiedenen 1 x 1- Reihen

Rechenunterricht 1. Klasse

- ca. 30 Wochen/ Schuljahr
- ca. 4-5 Stunden/ Woche
- ca. 120-150 Unterrichtsstunden Mathematik im 1. Schuljahr

**Zahlenraumerweiterungen:**

- 1. Klasse: bis 20 (Zehnerzahlen bis 100)
- 2. Klasse: bis 100
- 3. Klasse: bis 1.000
- 4. Klasse: bis 1.000.000

Anordnung der Zahlen:

- Vorgänger/ Nachfolger
- Innerliches Überschauen der Zahlenräume
- Materialien unterstützen das lokale Gedächtnis

## E. Rechenschwächen

### 1. Didaktisch verursachte Rechenschwächen

#### Mögliche Gründe:

- Methodenwechsel, z.B. durch Schul- oder Lehrerwechsel verursacht
- zu enge Fixierung an bestimmte Veranschaulichungen (z.B. Rechenstäbchen), Schwierigkeiten des Kindes beim Übergang zum nichtanschauungsgebundenen Rechnen
- Logizistischer Ansatz der "Neuen Mathematik" in den 60er Jahren, wurde recht bald wieder abgeschafft, verursachte zu große Rechenschwierigkeiten
- Sprachwechsel (z.B. bei Aussiedler-, Gastarbeiterkindern)
- fehlender Übergang vom rhythmischen zum Zeitgedächtnis (wenn die Kinder auf dem Stand des Klatschens stehen bleiben); Versuch (Test) von Piaget

### 2. Psychisch verursachte Rechenschwächen

- Entmutigung vom sozialen Umfeld her (z.B. Leistungs- und Lernzwang im Elternhaus)
- Mathematik sensibel in Bezug auf Versagensängste (Arithmaphobie)

### 3. Anlagebedingt verursachte Rechenschwächen

#### a) Ursachenfrage führt auf die Frage nach dem **Ursprung der Mathematik**.

Worauf beruht mathematisches Können? Was ist Mathematik? Antworten:

- *Grundlagentheoretiker*: Axiome, Logik, Mengenlehre; *Mathematik(er)* formuliert allgemeingültige Gesetze geistiger Entitäten (z.B. Zahlen, Formen) und untersucht deren logische Abhängigkeit (Mathematiker besitzen eine aktive innere Bewegungsvorstellung)
- *Piaget*: Aufbau genetisch entwicklungspsychologisch bedingt
- *Neuropsychologie*: Körperorientierung und Rechenfähigkeit sind gekoppelt (hängen zusammen)

Rechnen beruht auf der verinnerlichten Wahrnehmung der eigenen Bewegung

Beispiele: Schnittpunkt zweier Geraden, blinde Schülerin; Bewegungsvorgang (Motorik) grundlegend im Geometrieunterricht

Mathematik entsteht dort, wo die äußere Bewegung eine innere Fortsetzung findet  
 ⇒ Zahlbegriffsbildung

#### b) Anlagebedingte Entwicklung

- Voraussetzung für mathematische Fähigkeiten
- Sinne, Motorik, (un-)koordinierte Bewegungen, Lateralität (Seitigkeit – links/rechts),
- Stufe der konkreten Operationen, Wahrnehmung als innerer Bewegungsvorgang
- Fingeragnosie (fehlende innere Beziehung zu den Fingern). Test: Zahlenraten mit Fingern
- Desintegration bestimmter Sinne, Körper – Seele – Geist,  
 Beispiel: **Kongruenzsätze** der elementaren Geometrie setzen Formerfassung unabhängig von der Raumlage voraus (daher erst ab Klasse 7)
- Erster Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind schon kongruent, wenn sie in drei entsprechenden Seiten übereinstimmen - kurz: SSS, weitere Kongruenzsätze: SWS, WSW bzw. SWW, SsW (warum so? Konstruktionsbeispiel dazu?)

#### **4. Zu den Aufgaben des Lehrers im Grundschul–Mathematikunterricht gehört die Entwicklung folgender drei Hauptstufen:**

- Sinnesschulung und Sinneskoordination
- Umgang mit Sinnestätigkeiten (innerer Umgang) und Vorstellungsbildern
- Geistiges Erfassen objektiver Gesetzmäßigkeiten

#### **5. Therapien ? – Übungen bei Rechenschwächen:**

z.B. durch Kunst-, Musik- und Bewegungstherapie: Verbindung von Mathematik mit Malen, Bewegungen, Instrumenten

- Grobmotorik/ Feinmotorik
- Ausbildung der Koordination
- Zustand der Seitigkeitsentwicklung (Linkshänder)
- Verfestigungen/ Anomalien

## **F. Ziele, Aufgaben, Bedeutung des Mathematikunterrichts**

Der MU hat den Anspruch, die Schüler sowohl **geistig** (formal; logisch-klares Denken) als auch **praktisch** (material, anwendungsbezogen) auszubilden.

Der Lehrer steht im Spannungsfeld zwischen beiden Ansprüchen bzw. Aufgaben.

Zieldiskussion im 19.Jh. - Diesterweg, 1844: MU bildet den Menschen u. hat sittliche Wirkung

### **1. Was ist Mathematikdidaktik?**

#### **Wissenschaft vom Lehren und Lernen der Mathematik.**

Sie sucht Antworten auf Fragen der Art:

- Was könnten, was sollten Schüler im Mathematikunterricht lernen?
- Welche Gründe gibt es hierfür? Sollen alle Schüler allgemeinbildender Schulen in allen Schulstufen Mathematik lernen? Welche Bedeutung kommt der Mathematik in berufsbildenden Schulen zu?
- Wie könnte oder sollte ein bestimmter mathematischer Inhalt gelehrt, eine bestimmte mathematische Fähigkeit geschult werden?
- Welchen Einfluss haben Neigungen und Fähigkeiten von Schülern auf Antworten zu vorherigen Fragen?
- Wie können Schüler mehr Freude an mathematischen Fähigkeiten gewinnen?
- Welche Zusammenhänge bestehen zwischen diesen Problemen?

Aus solchen Fragestellungen ergeben sich vielfältige **Forschungs- und Entwicklungsarbeiten** für die Didaktik der Mathematik:

- das kritische Hinterfragen bzw. Rechtfertigen von Inhalten und speziellen Lernzielen im Rahmen allgemeiner Zielsetzungen des Mathematikunterrichts
- die Analyse von Inhalten auf ihre Bedeutung für den Erwerb mathematischer Fähigkeiten, auf ihre Bedeutung für Anwendungen, auf ihre Beziehungshaltigkeit im Hinblick auf die Entwicklung von Vorstellungen und Verständnis

- die Untersuchung und Aufbereitung mathematischer Inhalte mit dem Ziel, sie für bestimmte Lerngruppen zugänglich zu machen
- die Analyse allgemeiner mathematischer Tätigkeiten und die Ausarbeitung von Konzepten zur Entwicklung entsprechender Fähigkeiten (z.B. Mathematisieren, Problemlösen, Beweisen)
- die Erforschung von Lernvoraussetzungen und von Lehr-/ Lernprozessen und damit verbunden die Entwicklung geeigneter empirischer Methoden und theoretischer Konzepte
- die Entwicklung von methodischen Instrumentarien und von substantiellen Unterrichtseinheiten sowie die Erforschung ihrer praktischen Umsetzbarkeit, insbesondere im Hinblick auf die Qualität der induzierten Lernprozesse
- die Analyse der Möglichkeiten neuer Technologien für das Lehren und Lernen von Mathematik
- die Entwicklung und Evaluation von Curricula
- die Entwicklung von Methoden zur Vorbereitung, Gestaltung, Beobachtung und Analyse des Unterrichts
- die Entwicklung von Konzepten zur Lehrerbildung

Die **Mathematik** ist die zentrale Bezugswissenschaft der Mathematikdidaktik. Zur Erfüllung ihrer Aufgaben bezieht die Mathematikdidaktik auch Ergebnisse und Methoden anderer Geisteswissenschaften ein, wie etwa der Pädagogik, der Soziologie, der Psychologie, der Wissenschaftsgeschichte etc.

Zur Gewinnung wissenschaftlicher Erkenntnisse über das Lehren und Lernen von Mathematik bedarf es einer spezifisch mathematikdidaktischen Forschung, die aus unterschiedlichen Sichtweisen ein integratives Bild des Mathematikunterrichts formen und begründen kann, um es konstruktiv in die Praxis umzusetzen. (Quelle: GDM – Gesellschaft für Didaktik der Mathematik)

⇒ die Aufgaben und Ziele werden auch im Lehrplan Sachsen genannt

## 2. Klassifizierung der Ziele des Mathematikunterrichts

### 1. Fachübergreifende Ziele

- argumentieren lernen
- sich kreativ und flexibel in Problemsituationen verhalten
- ordnen und strukturieren von Umweltsituationen
- Ausdrucksverhalten und Sprache

### 2. Fachbezogene Ziele

Vergleichen – Sortieren – Ordnen – Klassifizieren – Symbolisieren – Analogisieren - Generalisieren - Spezialisieren

### 3. Fach- und Inhaltsspezifische Lernziele des Mathematikunterrichts

→ siehe jeweiliger Lehrplan

MARTIN WAGENSCHNIG: Exemplarisches Lehren und Lernen

→ im Zusammenhang mit anderen Fächern Erfahrungen sammeln und anwenden können

### 3. Inhalte & Lernbereiche des Mathematikunterrichts in der Grundschule

Geometrie - Arithmetik - Größen - Festigung u. Vernetzung: Verbindung von Geometrie und Arithmetik - Vier Wahlpflichtbereiche: Zahlen überall √ "Das macht nach Adam Ries ..." √ Math. zum Staunen und Spielen √ Mathematik in der Kunst: s.a. Kap. I. Unterrichtsplanung

TRAVERS (Amerik., 1977): Wozu Mathematikunterricht? -

- ist für die Schüler nützlich und hilfreich
- diszipliniert die Gedanken und Sinne
- kann interessant und schön sein

In der Schulmathematik anzustrebende

### 4. Haltungen und Einstellungen der Schüler

- Freude am eigenen Denken und Auseinandersetzen mit Problemen
- Risikobereitschaft, beim Denken eigene Wege zu gehen; eigene Fehler sind wichtige Stufen des Lernens
- Aufbau einer kritischen Haltung gegenüber der Einstellung, alles sei berechenbar bzw. mit mathematischen Mitteln in den Griff zu bekommen
- Verstärkte Zurückhaltung gegenüber den erstbesten Lösungshypothesen. Abwägen mehrerer möglicher Lösungswege
  - ➔ Grenzen kennenlernen ⇒ Anwendung mathematischen Wissens
  - ➔ Sachübergreifende Beziehung der Mathematik kennenlernen

Literatur: RADATZ, Hendrik; SCHIPPER, Wilhelm: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel Hannover 1983. Kap. 1.1

### 5. Stellung der Mathematikdidaktik

Def: Mathematikdidaktik ist die Wissenschaft, die sich mit dem Lehren und Lernen von Mathematik beschäftigt (Geisteswissenschaft, die auf das Lehren/ Lernen abzielt und weniger auf den fachlichen Aufbau).

GRAMM (Pädagoge): Mathematik ist mehr als angewandte Mathematik.  
Spezifische Form der sozialen Interaktion

#### Beeinflussung der Mathematikdidaktik durch 5 Bereiche:

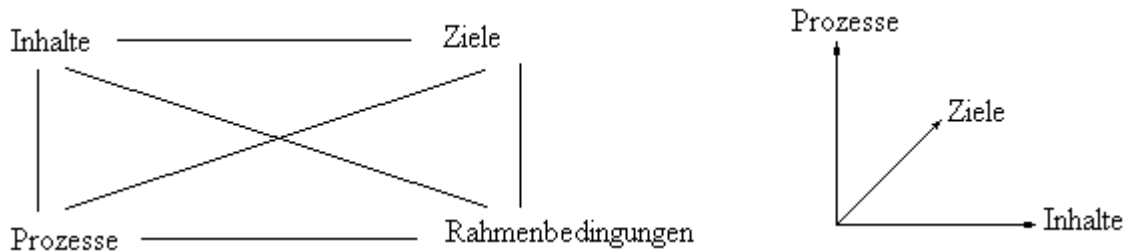
1. Mathematischer Bereich
2. Bereich der anderen Schulfächer Physik, Deutsch, Geschichte, Geographie, Musik, ...
3. Erziehungswissenschaftlicher und psychologischer Bereich
4. Sozialwissenschaftlicher und gesellschaftlicher Bereich
5. Wissenschaftsgeschichtlicher Bereich

Beschreibung in Anlehnung an KLAFFKI (1977) als **Theorie** des Mathematikunterrichts:  
Umfasst Entscheidungen, Entscheidungsvoraussetzungen & Entscheidungsbegründungen in:

1. Zielen und Absichten
2. Inhalten
3. Organisations- und Vollzugsformen (Methoden)
4. Medien/ Mittel – Erfolgskontrolle

**Modell des Mathematikunterrichts** (Travers, 1977)

- Besteht aus 3 wesentlichen Komponenten:
  - (1) Inhalte
  - (2) Ziele
  - (3) Prozesse (Planung, Durchführung, Auswertung)

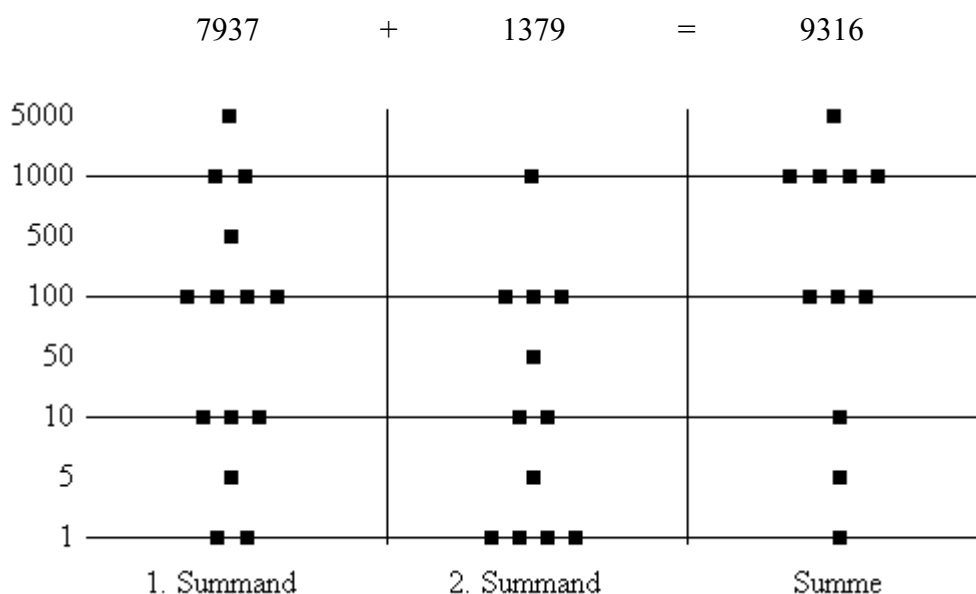


**G. Geschichte des Mathematikunterrichts**

**1. Instrumentales Rechnen**

- mit Rechenbrett und Rechensteinen, Abakus
- schriftliches Rechnen nach Regeln lernten im 16. Jh. die Händler und Gewerbetreibenden durch die Rechenmeister. Der berühmteste Rechenmeister ist ADAM RIES (1492 – 1559) aus Annaberg/ Sachsen.
- Rechnen mit dem Abakus

*Das Rechnen auf den Linien:*



## 2. Liberale Bildungsreform im Zuge der Aufklärung (18. Jh.)

Die richtungsweisenden Vorschläge von JOHANN AMOS COMENIUS (17. Jh.) finden erst ein Jahrhundert später Gehör.

Bis ins 17. Jh. betonte der Rechenmeister/ Rechenunterricht in Deutschland fast ausschließlich den praktischen Zweck. Der Schüler lernte, *wie* man rechnet, es wurde aber nicht gefragt, *warum* man so und nicht anders rechnet. Damit war das Rechnen eine mechanische Fertigkeit, ein Operieren nach auswendig gelernten Regeln, ein Abrichten. Im Vordergrund steht dabei das so genannte **materiale Prinzip**.

Das änderte sich mit HEINRICH PESTALOZZI (1746 – 1827): Er forderte zur Schulung des Geistes (**formales Prinzip**):

- formale Bildung
- die Einsicht in die Rechengesetze (Denkrechnen) und
- den stufenmäßigen Aufbau der Mathematik. Er erkannte
- die Bedeutung des Kopfrechnens und
- den Wert der Anschauung
- Rechenunterricht im Mittelpunkt des gesamten Unterrichts

## 3. Reform und Restauration (Anfang 19. Jh.)

- WILHELM VON HUMBOLDT: Neuhumanismus, Einheit der Bildungsorganisation
- Mitte des 19. Jh. fordert STIEHL die praktische, materiale Bildung
- FRIEDRICH A. W. DIESTERWEG (1790 – 1866): für Ausgleich beider Richtungen
- AUGUST GRUBE (1816 – 1884): Orientierung an der Sache, monographische Zahlbehandlung (jede Zahl einzeln)

### Exkurs: Unterschied zwischen mündlichem und schriftlichem Rechnen

Beispiel:	mündlich (halbschriftlich)	schriftlich
	$\begin{array}{r} 225 * 16 \\ \hline 200 * 16 = 3200 \\ 25 * 16 = 400 \\ \hline 225 * 16 = 3600 \end{array}$	$\begin{array}{r} 225 * 16 \\ \hline 225 \\ 1350 \\ \hline 3600 \end{array}$

Mit den Rechenmittel ändern sich auch die Rechenmethoden.

Mündliches Rechnen	Schriftliches Rechnen
• Kopfrechnen	• Tafelrechnen
• Zahlenrechnen	• Ziffernrechnen
• Rechnen ohne Stellenwert	• Rechnen mit Stellenwert
• Denkrechnen	• Regelrechnen
• Natürliches Rechnen	• Künstliches Rechnen

- Die Verschmelzung des formalen und des materialen Prinzips ist ein Werk der HERBART-schen Schule. JOHANN FRIEDRICH HERBART (1776 – 1841) wird als "der Philosoph unter den Pädagogen und der Pädagoge unter den Philosophen" angesehen.  
Ziel des Unterrichts: Erziehung, sittliche Bildung  
⇒ heute: ethische Erziehung  
⇒ die HERBART'sche Schule hat die Methodik des erziehenden Unterrichts weiter ausgebildet.

#### **Formale Bildung (Denkrechnen) hat Vorrang (Nachfolger PESTALOZZIS):**

- WILHELM VON TÜRK, Potsdam, 1806: "Allg. Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für jedermann"
- ERNST TILLICH, Erziehungsinst. Dessau und PETER FR. TH. KAWERAU, Köslin/ Pommern

#### **Lebenspraktische Bildung hat Vorrang:**

- KARL GEORG RAUMER, Breslau und Halle
- JOHANN BAPTIST GRASER, Bayreuth

#### **Ausgleichend wirkten:**

WILHELM HARNISCH (1787 – 1864): Seminardirektor in Weißenfels. Das Rechnen dient der Ausbildung aller geistigen Kräfte und zugleich der Geschicklichkeit fürs Leben.

FRIEDRICH ADOLF DIESTERWEG (1790 – 1864), Mörs, Berlin: "Methodisches Handbuch für den Gesamtunterricht im Rechnen", (1829/30). Fordert mehr Selbständigkeit der Schulen! Trat gegen eine einengende staatliche und kirchliche Schulaufsicht ein!

ERNST HENTSCHEL (1804 – 1875), Weißenfels, Seminarlehrer

#### **Veranschaulichungsmittel:**

1. TILLICHs *Rechenkasten*: Urform der Cuisenaire- Stäbe
2. HEERSche *Würfel*: Vorläufer der Steckwürfel und Mehrsystemblöcke
3. GERSBACH: 10 x 10er - *Stecktafel* mit Holzzylinder
4. "Russische Rechenmaschine" – Abacus
5. AUGUST WILHELM GRUBE (1816 – 1884): "Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule, nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode." (1842)  
Sein Grundsatz: "Der Gegenstand ist zugleich seine Methode!" Daraus entstand die *monographische Zahlbehandlung*
6. Hundertertafel, Leitern

## **4. Primat des Sachrechnens und Ausbau der Volksschule (ab 1850)**

Sachgebiete: Geldrechnen – Flächenmaße - Gewichte - Uhrzeit  
Vereinheitlichung von Maßen, Gewichten und Münzen  
Einführung der Mitteleuropäischen Zeit (MEZ)

Psychologie und Philosophie trennen sich.

An Stelle der kirchlichen tritt die staatliche Schulaufsicht.

Orientierung an den mathematischen Inhalten.

- HERMANN HAASE (Methodik 1906): Zahlbegriff als Maßzahl bzw. Operator
- BREIDENBACH, 1947: führender Rechendidaktiker in den 1950ern
- E. WILK: Systemmethodiker (1922): Orientierung am Inhalt vermittelnden Standpunkt zwischen Zählern und Anschauern

Diskussion über das Wesen der Zahl. Zwei Gruppen entstehen: "Anschauer" und "Zähler"

<b>Anschauer</b>	<b>Zähler</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Zahlen bis 4 (oder 5) können <i>simultan</i> aufgefasst werden</li> <li>• <i>Räumlich simultane</i> Zahldarstellung auch größerer Zahlen</li> <li>• Einsatz von <i>flächig</i> angeordneten Zahlbildern (z. B. Würfel)</li> <li>• Betonung des Zähl- und Rechenmaterials</li> <li>• Betonung der <i>statistischen</i> Aspekte</li> <li>• Betonung des <i>kardinalen</i> Zahlaspekts</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Keine simultane Zahlauffassung - beruht auf schnellem Auszählen der Objekte</li> <li>• Zahlen können nur <i>zeitlich sukzessiv</i> aufgefasst werden</li> <li>• Einsatz von <i>linear</i> angeordneten Zählmaterialien</li> <li>• Betonung des Zähl- und Rechenvorgangs</li> <li>• Betonung der <i>dynamischen</i> Aspekte</li> <li>• Betonung des <i>ordinalen</i> Zahlaspekts</li> </ul>

## 5. Die Reformpädagogik

Pädagogik vom Kinde aus

- ELLEN KEY: Das Jahrhundert des Kindes (1900)
- MARIA MONTESSORI: Entwicklungsgesetze des Kindes; vorbereitete Lernumgebung; "Hilf mir, es selbst zu tun!"
- RUDOLF STEINER gründet 1919 die erste Waldorfschule (einheitliche Volks- und höhere Schule): kognitive und handwerklich-künstlerische Ausbildung gleichwertig. ⇒ Kind steht im Mittelpunkt
- JOHANNES KÜHNEL (1916): untersucht Lernprozess, die seelische Entwicklung des Kindes ⇒ Hunderterblatt
- JOHANNES WITTMANN, 1929: geht von der Ganzheit aus, Rechenunterricht in 23 Stufen geteilt
- A. GERLACH, 1914: Veranschaulichung von Zahlenzusammenhängen
- KEMPINSKY, 1922: selbstständiges Arbeiten der Kinder, MU verbunden m. Sachunterricht
- KERSCHENSTEINER: Arbeitsunterricht

## Exkurs: Die zehn Grundlagen der Waldorfpädagogik

### 1. Das Grundprinzip der ersten Waldorfschule

- 1919 von RUDOLF STEINER (1861-1925) in Stuttgart gegr.
- *Grundprinzip*: eine Schule sozialer Brüderlichkeit, demokratischer Gleichheit und geistiger Freiheit
- gemeinsame Bildung unabhängig von Herkunft, Begabung und späterem Beruf

### 2. Angstoffreies Lernen - kein Sitzenbleiben

- 12 Schuljahre ohne Sitzenbleiben für alle SchülerInnen
- soziale, anregende Lerngemeinschaft
- Pädagogik der *Förderung* anstatt Prinzip der Auslese
- keine frühe Selektion in verschiedene Schul- und Abschlussarten



### 3. Lehrplan entwicklungsorientiert

- Lehrplan ausgerichtet auf die höchstmögliche Förderung der Veranlagungen und Begabungen der Kinder
- Inhalte und Methodik sind mit den entwicklungsgemäßen Lernprozessen abgestimmt
- Unterrichtsziel ist d. Befähigung zum *mündigen Handeln*, die innere *menschliche Freiheit*
- Leistung nicht auf kognitive und prüfungsrelevante Dimension beschränkt

### 4. Handwerklich-künstlerischer und kognitiver Unterricht gleichberechtigt

- fördert Beweglichkeit, schöpferische Fähigkeiten und Begabungsvielfalt
- fördert Erlebniskräfte (emotionales Lernen) und lebenspraktische Orientierung
- fördert die differenzierte Ausbildung des Willens (handlungsorientiertes Lernen)
- *Eurythmie* schult Ausdrucksfähigkeit und Bewegungslust durch Sprache und Musik

### 5. Bildhafter Unterricht in den ersten Schuljahren

- läßt zusammen mit dem Anschaulichen und Erlebnishaften auch das Gesetzmäßige und Wesenhafte der Dinge lebendig werden und verstehen
- Motivation zu lebenslangem Lernen

### 6. Wissenschaftlich orientierter Unterricht ab dem 14. Lebensjahr

- ist bestrebt, sich mit den inneren Problemen des jungen Menschen zu verbinden und ihm Antworten auf seine Lebensfragen zu geben
- ausgeprägte lebenspraktische und berufskundliche Orientierung (mehrere Praktika)

### 7. Ökonomisch-fachübergreifender Epochenunterricht

- wird in den Fächern - oft themen- und projektbezogen - erteilt, in denen Sachgebiete in sich geschlossen behandelt werden können: z.B. Deutsch, Gesch., Mathematik, Naturw.
- Gebiete, die laufende Übung verlangen, werden in Fachstunden erteilt: z.B. Fremdsprachen und künstlerischer Unterricht
- Fremdsprachen vom ersten Schuljahr an

### 8. Zeugnisse und Abschlüsse

- mit der Auslese wurde auch das übliche Zensurensystem abgeschafft
- Zeugnisse bestehen aus *detaillierten Charakterisierungen*
- geben Auskunft über Arbeitsfreude und Arbeitsstil, machen die Leistung, den Lernfortschritt, die Begabungslage, das Bemühen in den einzelnen Fächern durchsichtig
- Abschlüsse: Mittlere Reife, Fachhochschulreife oder Abitur

### 9. Selbstverwaltung durch Eltern und Lehrer

- freiheitliche Verfassung anstatt hierarchisch organisierte Fremdbestimmung
- Autonomie und Selbstverwaltung bilden zukunftsorientierte soziale Erfahrungsfelder
- pädagogische Leitung durch wöchentliche Lehrerkonferenz, an der alle Lehrer gleichberechtigt mitwirken

### 10. Finanzierung

- Schulen in freier Trägerschaft (getragen von Schulvereinen) sind den staatlichen Schulen verfassungsrechtlich gleichgestellt, sie dienen dem pluralistischen Bildungswesen
- die staatliche Zuschüsse decken die Betriebskosten nur teilweise ab
- die Elterbeiträge sind an den meisten Schulen nach Einkommen gestaffelt

RSt: Die gesamte **soziale Frage** ist eine **Bildungsfrage**. -

Alle Erziehung muß letztendlich in Selbsterziehung münden.

## 6. Rechenunterricht im Nationalsozialismus

- Waldorfschulen wurden verboten (auch andere Reformpädagogische Schulen)
- Mathematik spielt nur eine sekundäre Rolle

## 7. Wiederaufbau ab 1945

Anknüpfung an die Reformpädagogik:

- KÜHNEL, KOLLER
- BREIDENBACH und JOHANNES WITTMANN

## 8. Reformen ab 1963

JEAN PIAGET "Mengenlehre"

- Inhaltliche Reform des Rechenunterrichts
- Anfang der 70er Jahre Defizit im Rechenunterricht, die Kinder konnten nicht mehr so gut rechnen
- Hälfte der 70er Jahre hat sich die Mengenlehre nicht mehr durchgesetzt, weil die arithmetische Kompetenz gefehlt hat  $\Rightarrow$  Mengenlehre ist zu formal

# H. Prinzipien des Mathematikunterrichts

Grundlage einer wissenschaftlichen Begründung der Mathematikdidaktik sind sowohl psychologische und allgemeine Lerntheorien als auch, eigenständige durch Erfahrung bestätigte mathematikdidaktische Theorien.

Die sich daraus ergebenden konkreten Folgerungen für die Unterrichtspraxis sind so genannte mathematikdidaktische Prinzipien, d.h.

### **Regeln zur Planung und Durchführung von Unterricht (Leitfäden).**

## Allgemein didaktische Prinzipien

### 1. Spiralprinzip

- für Lehrplangestaltung von Interesse
- Thema bearbeiten – ruhen lassen – später wieder aufgreifen
- Einfluss auf die Auswahl von Inhalten für den Unterricht  
 $\rightarrow$  Prinzip des vorwegnehmenden Lernens, Prinzip der Fortsetzbarkeit

### 2. Prinzip der Deutlichkeit

- ERICH WITTMANN  $\rightarrow$  Schema mit Sender und Empfänger = Ausgangspunkt
- Lehrersprache und Lehreräußerungen müssen für den Schüler verständlich sein
- Viel schriftlich machen (Tafel, Folie)  $\rightarrow$  große Deutlichkeit (bei Aufgabenstellungen)

### 3. Prinzip der Schülerorientierung

- Konkret operative Denkweise des Schülers berücksichtigen
- Konkrete Handlungserfahrungen ermöglichen

#### 4. Integrationsprinzip

- Lernen in Zusammenhängen
- Lernen entsteht, wenn ein neuer Lerninhalt mit bereits gelerntem in Verbindung gebracht wird

#### 5. exemplarisches Prinzip

- MARTIN WAGENSCHNEIDER
- je tiefer in ein einzelnes Teilgebiet eingegangen wird, desto besser kann man in das komplexe Thema eingehen

### Mathematikdidaktische Prinzipien

#### 1. operatives Prinzip

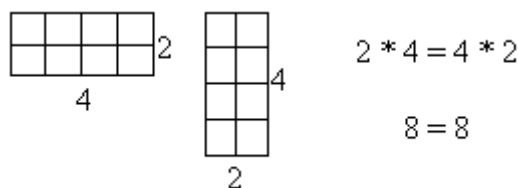
- Erarbeitung mathematischer Begriffe, Techniken u.a. mit Hilfe von Handlungen. Operationen = verinnerlichte Handlungen, die kompositionsfähig, assoziativ und reversibel (umkehrbar) sind.

#### 2. Aufbauprinzip

- Grundschule: *induktives* Vorgehen anstatt mathematisch deduktiver Aufbau
- Kinder gehen von Einzelerfahrungen aus → von Einzelbeispielen zu den Gesetzmäßigkeiten/ allg. Regeln → konkrete Lernsituationen erzeugen
- Korrespondiert mit dem entdeckenden Lernen
- z. B.  $25 + ? < 43$   
 $L = \{1; 2; 3; \dots; 17\}$  durch probieren

#### 3. Dynamisches Prinzip

- DIENES hat es formuliert
- Konsequenz des Aufbauprinzip
- 3 Phasen:
  1. vorbereitende Spielphase
  2. Phase des Bewusstwerdens der Struktur
  3. Formulierung der Gesetzmäßigkeit



- verstehen der Struktur/ Gesetzmäßigkeit

#### 4. Prinzip der drei Repräsentationsformen

- enaktiv: handeln, handlungsorientiert darstellen -> Gruppenarbeit
  - ikonisch: Bildhaftigkeit -> Stillarbeit
  - symbolisch: abstrakte Zeichnungsebene, formale Sprache -> schwierigste, aber leistungsfähigste Form, da komprimiert -> Frontalunterricht
- "Jedem Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Unterrichtsgegenstand beigebracht werden.", BRUNER
  - immer von handelnden Darstellungsformen ausgehen
  - → Methodenwechsel

## 5. Variationsprinzipien

### a) *mathematische Variation*

Variation von Variablen, Multiplikationsfaktoren usw.

Bsp:  $a + b = c$ ;  $7 \cdot 8 = x$ ;  $7 \cdot x = 56$ ;  $x \cdot 8 = 56$

### b) *Variation der Veranschaulichung*

auf verschiedene Darstellungen eines mathematischen Sachverhaltens bezogen

## 6. Genetisches Prinzip

- allmählicher Aufbau der mathematischen Inhalte "von unten"
- orientiert sich an der Entwicklung mathematischer Ideen und Probleme (Aufbau in der Menschheit z.T. ähnlich wie beim Kind, psycho-genetischer Parallelismus)

# I. Unterrichtsplanung

## 1. Planungsstufen

- a) Bildungspolitische Programme (Parlament, Kultusministerien, Eltern-/ Lehrerververtretungen)
- b) Lehrplan
- c) Stoffverteilungsplan
- d) Unterrichtsentwurf

## 2. Lehrplan

- vereinheitlichende Funktion
- verpflichtend
- Bindeglied zwischen staatlicher Bildungspolitik und Schule

## 3. Bildungs- und Erziehungsauftrag

- GS vermittelt allgemeine Grundkenntnisse und Grundfertigkeiten
- strebt an, Entwicklungsverzögerungen und Lernbeeinträchtigungen auszugleichen
- Vielfalt an Beeinträchtigungsmöglichkeiten
- Lernen mit Kopf, Herz und Hand
- Stätte sozialer Begegnungen
- stark differenzierte Unterrichtsmethoden
- ganzheitliches Erschließen der Lehrplaninhalte
- Klassenlehrerprinzip
- Lehrer nicht nur Wissensvermittler, sondern auch Partner in allen Lebensfragen
- enge Zusammenarbeit mit dem Elternhaus
- Einbindung fachübergreifender Erziehungsaspekte

## 4. Aufgabe und Ziele des Mathematikunterrichts in der GS

- Einführung in grundlegende mathematische Inhalte, Verfahren und Denkweisen
- auf weitgehend anschaulicher Grundlage mit Bezug zur Lebensumwelt
- die Schüler sollen:
  - durch Zahlen beschriebene Zusammenhänge erfassen können

- mit Größen umgehen können
  - Sachaufgaben lösen können
  - sich einfache ebene und räumliche geometrische Figuren vorstellen und darstellen können
- Lernbereiche

## 5. Hinweise zur Unterrichtsgestaltung

- Handlungserfahrungen, Mitgestaltung des Mathematikunterrichts
- Sprachpflege
- Vertrauen in die Leistungsfähigkeit stärken
- Übungen, Hausaufgaben, mündliche und schriftliche Lernkontrollen, Fehler, Sozialformen interessant und abwechslungsreich gestalten
- Integration der Inhalte in übergreifende Zusammenhänge

### Übersicht über die Lernbereiche und Richtstundenzahlen (Grundschule Freistaat Sachsen 2004; Klasse 1 und 2 zusammengefaßt)

1. Geometrie	70 / 35 / 35	Stunden
2. Arithmetik	130 / 65 / 65	Stunden
3. Größen	50 / 25 / 25	Stunden
Festigung u. Vernetzung:		
Verbindung von Geometrie und Arithmetik	10 / 5 / 5	Stunden
Vier Wahlpflichtbereiche:		
Zahlen überall ∨ "Das macht nach Adam Ries ..." ∨		
Math. zum Staunen und Spielen ∨ Mathematik in der Kunst	20 / 10 / 10	Stunden

*Hinweise für den Benutzer des Lehrplans:*



Curriculare Lehrpläne:

- Lernziele (Grobziele, Richtziele)
- Lerninhalte (Stoffe, Themen, Projekte, Übungen)
- Unterrichtsverfahren (Methodisches, Medien, Zeitplanung, Lernorganisation)
- Lernzielkontrollen (mündlich, schriftlich, praktisch)

## 6. Stoffverteilungsplan

- Strukturierung der Lehrplaninhalte des Schuljahres
- Sinnvolle Verzahnung, sachlich logische Anordnung der Inhalte
- thematische Abwechslung (Arithmetik, Größen, Sachkunde, Geometrie)
- Einplanung von Wiederholungsphasen
- Einplanung von Verfügungswochen
- Abstimmung mit anderen Fächern (Heimatkunde/ Sachunterricht, Deutsch, Kunst)
- Minimallehrpläne: ca. 30 Unterrichtswochen, im Gegensatz dazu hat das normale Schuljahr 37 – 42 Unterrichtswochen
- Wochenplan mit Stundenplänen

## 7. Planungsmodelle

Mögliche Stufung (H. ROTH):

- 1) Stufe der Motivation
- 2) Stufe der Schwierigkeiten
- 3) Stufe der Lösung
- 4) Stufe des Tuns/ Ausführens
- 5) Stufe des Behaltens und Einübens
- 6) Stufe der Anwendung

**Exkurs zur konkreten Unterrichtsplanung I. bis IV. (drei Seiten):**

### **I. Schematische Gliederung zur Ausarbeitung einer Unterrichtsstunde**

#### **1. Didaktische Vorüberlegungen**

##### *1.1 Lern- und Stundeneinheit*

- Stellung des neuen Begriffs bzw. Stundenthemas in der Schulmathematik (oder in diesem Schultyp)?
- Warum ist die Einführung gerade an dieser Stelle und nicht früher oder später geeignet?
- Neue, grundlegende Begriffe? Bedeutung dieser Begriffe?
- Mögliche Anwendungen? In dieser Jahrgangsstufe oder eventuell auch später, in welchen Klassen? In welchen Fächern?
- Welche fachübergreifenden Beziehungen gibt es?
- Welcher altersgemäße Zugang bietet sich an? Alternativen? Handlungsspielräume?
- Gliederung der Unterrichtssequenz?
- Welches Thema hatten die vorangegangenen Stunden?
- Was ist in den folgenden Stunden geplant?

##### *1.2 Zur Klassensituation*

- Schülerzahl (Jungen/Mädchen)?
- Besonderer Zweig/Schwerpunkt? Soziales Milieu?
- Beteiligung der Schüler? Mitarbeit?
- Leistungsgefüge?
- Schwierigkeiten?
- Beziehung zur Klasse?

#### **2. Lernziele**

Beispiel: Mathematik-Lehrplan Grundschule Klasse 1 - 4 (Sachsen) (2004), Seite 25

Lernziele nach Klasse 4, Lernbereich 2: Arithmetik, Seite 25:

Einblick gewinnen in das schriftliche Verfahren der Division. Näherungswerte beim Überschlagen. Untersuchen der Teilbarkeit, Bilden von Bruchteilen. Kennen von Überschlags- und Kontrollverfahren bei den vier schriftlichen Rechenverfahren.

Ergänzend: Grobziele, Feinziele formulieren

### 3. Lerninhalte und Unterrichtsverfahren

#### 3.1 Methodische Vorbemerkungen

- Arbeitsgrundlagen?
- Schulbuch (das eingeführte bzw. ein älteres)?
- Heft? Arbeitsblatt? Tageslichtprojektor (Polylux)?
- Reihenfolge der Unterrichtsabschnitte?
- Auf Methodenwechsel achten!
- Begründungszusammenhang von Ziel, Inhalt und Methode

#### 3.2 Ablauf der Stunde

z. B. dreispaltig:

1. Tafel- und Heft-Arbeit (Gliederung des Tafeltextes?)	2. Bemerkungen und Fragen	3. vorgesehener Zeitablauf
--	---------------------------	----------------------------

#### Zeitablauf:

- Hausaufgaben-Besprechung?
- Motivation?
- Konkretes Problem?
- Mathematisierung des Problems?
- Mathematische Lösungswege?
- Rückkehr zum Ausgangsproblem?
- Mögliche Erweiterungen: historische Einbettung; Fragen der Genauigkeit untersuchen; Umkehrung von Einzelproblemen; neue, aktuelle oder weiterführende Gesichtspunkte, die möglicherweise in höheren Klassen aufgegriffen werden.
- Eventuell: Stundenrückblick,
- Hausaufgaben-Stellung.

Dabei empfiehlt es sich, folgende Elemente sorgfältig vorzubereiten und schriftlich zu formulieren:

- entscheidende Fragen, die sogenannten Schlüsselfragen, darüber hinaus
- Texte,
- Skizzen und
- Formeln, die an der Tafel oder im Heft vorgesehen sind.

#### 4. Nachbemerkungen

- Vorgenommene Änderungen bzw. Abweichungen gegenüber dem geplanten Verlauf in der gehaltenen Stunde?
- Empfehlenswerte Änderungen in künftigen Stunden?
- Gründe dafür?

Es empfiehlt sich generell, der Stundenausarbeitung Arbeitsblätter und Folienkopien beizufügen.

## II. Didaktische Analyse (Modell zur Unterrichtsplanung)

Die **Überprüfung der Struktur und des Inhalts** des MUs nennt man eine didaktische Analyse. Sie geht folgenden fünf Fragen als Hilfsmittel zur Unterrichtsplanung nach (Fragen nach dem Inhalt haben Priorität gegenüber dem methodischen Vorgehen):

1. Exemplarische Bedeutung
  - lässt das Beispiel den Zusammenhang, die übergreifende Gesetzmäßigkeit erkennen?
2. Gegenwartsbedeutung
  - Klassensituation, Voraussetzungen, Motivation, geplanter Lernfortschritt?
3. Zukunftsbedeutung
  - für den unmittelbar bevorstehenden Unterricht?
4. Struktur des Inhalts
  - Sorgfältige, begründete Analyse der einzelnen Momente und ihres Zusammenhangs, Momente geschichtet?
  - Schwierigkeiten?
  - Minimalziel (Mindestwissen)?
5. Zugang
  - Welcher Zugang wäre methodisch günstig?
  - Welche Veranschaulichungen, Situationen erscheinen geeignet?
  - Welche Anwendungen bieten sich an?
  - Wodurch wird Selbstständigkeit angeregt?

## III. Berliner Modell

Unterricht wird durch folgende voneinander abhängige Momente bestimmt:

1. soziokulturelle Voraussetzungen
2. anthropologisch-psychologische Voraussetzung
3. pädagogische Ziele
  - kognitive, emotionale, pragmatische Dimension
  - Taxonomiegruppen (BLOOM): Wissen, Verständnis, Anwendung, Analyse, Synthese, Bewertung
4. Inhalte
  - Sachanalyse – sie verlangt fachmathematische Sicherheit
  - Abfolge in der Arithmetik durch den systematischen Aufbau der Mathematik weitgehend vorgegeben
  - In der Geometrie eher propädeutisches Vorgehen
5. Methoden
  - Methodenkonzeption (GS: induktiv)
  - Lernphasen, etwa nach mathematisch- didaktischen Prinzipien oder nach den Lernstufen von Roth
  - Lehrverfahren: darstellend-rezeptiv oder entdeckenlassend → gibt Kommunikationsprozess an
  - Sozialform: Partnerarbeit, Gruppenarbeit, Kreisgespräch (Großgruppe), Einzelarbeit, Frontalunterricht, Rollenspiel, Wechsel
  - Interaktionsformen: Verhaltens- und Handlungsformen des Lehrers u. der Schüler
6. Medien
  - z.B.: Wandtafel, Dias, Folien, Hefteintrag, Arbeitsblatt, Steckwürfel, Schulbücher

## IV. Die Unterrichtsskizze

Funktionen: Klärung der Vorüberlegungen, der Organisation, der Struktur, der Alternativen  
Enthält: Ziele, Inhalt, Methoden, Medien

Aufbau etwa nach folgendem Raster:

Name:            Zeit:            Datum:            Klasse:            Fach:  
Thema des Lehrplanabschnitts: (Addition, Subtraktion usw.)  
Unterrichtsthema: (Addieren von Einern zu Zehnern, usw.)  
Lernziele: (Addieren, Darstellung, selbstständiges Nennen usw.)  
Vororganisation: (Medienbereitstellung, Tafelbild, Raumgestaltung usw.)

Geplanter Verlauf, z.B. :

- |   |     |
|---|-----|
| (1) Eckenrechnen                          | 5'  |
| (2) Hinführung $\Rightarrow$ frontal      | 5'  |
| (3) Erarbeitung $\Rightarrow$ frontal     | 10' |
| (4) Festigung $\Rightarrow$ Partnerarbeit | 10' |
| (5) Übung (Einzelarbeit)                  | 15' |

## J. Der Zahlbegriff

(Vorkenntnisse der Schüler; Erwerb der Zahlwortreihe)

### 1. Die verschiedenen Zahlenaspekte:

#### 1. Kardinalzahlaspekt:

- Anzahl der Elemente
- z. B. 3 Äpfel,  $10^{15}$  Möglichkeiten
- Addition: Mengenvereinigung
- Subtraktion: Restmengenbildung

#### 2. Ordinalzahlaspekt:

- Zählzahl: Folge der natürlichen Zahlen beim Zählen
- Addition: Weiterzählen
- Subtraktion: Rückwärtszählen
- Ordnungszahl: Rangplatz eines Elements in geordneter Reihe

#### 3. Maßzahlaspekt:

- Messen von Größen
- z. B. 5 Meter, 3 Sekunden
- Addition/ Subtraktion: Aneinandersetzen/ Abtrennen zugehöriger Repräsentanten

#### 4. Operatoraspekt:

- Vielfachheit einer Handlung
- z. B. 3 mal in die Schule gehen
- Addition: Verkettung von Operatoren
- Subtraktion: Umkehroperator

#### 5. Rechenzahlaspekt:

- Algebraischer Zahlenaspekt (zeigt sich z.B. in **Rechengesetzen**)
  - $(\mathbb{N}, +)$  – algebraische Struktur mit gewissen Eigenschaften, u.a. den Rechengesetzen: Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz
- Algorithmischer Zahlenaspekt (zeigt sich z.B. in **Rechenverfahren**)
  - Natürliche Zahlen lassen sich durch Ziffernreihen darstellen
  - z. B. 
$$\begin{array}{r} 628 \\ + 563 \\ \hline 1191 \end{array}$$

#### 6. Codierungsaspekt

- zur Bezeichnung von Objekten
- z. B. Tel.: 45 081; ISBN: 3471207511

## 2. Zählprinzipien

- Eins- Eins- Prinzip
- Prinzip der stabilen Ordnung der Zahlworte
- Kardinalzahl- Prinzip
- Abstraktionsprinzip
- Prinzip der beliebigen Reihenfolge der Elemente

## 3. Kindliche Beurteilungsverfahren zum Vergleich zweier Mengen

- Überprüfung der wahrnehmungsfähigen Übereinstimmung der Elemente zweier Mengen
- Paarweise Zuordnung
- Überprüfung durch Zählen

## 4. Unterrichts Anregungen

*Erste Arbeiten mit Zahlen:*

- Zählen von Dingen
- Zählübungen an abstrakten Mengen
- rhythmisches Zählen und Zählweise
- verschiedene weitere Zählübungen

*Mächtigkeitsvergleiche:*

- gleichzeitiges Tippen mit 2 Zeigefingern
- Zeichnen von Verbindungslinien
- lineare Liste
- typische Fehler

*Relationen zwischen Zahlen:*

- ist größer als
- ist kleiner als
- ist gleich
- Hilfevorstellungen

*Ziffern richtig lesen und schreiben:*

- große Ziffern auf Linienpapier zeichnen
- dann in Kästchen

*genaues Kennenlernen einer Zahl:*

- z. B. 5 oder 7

## 5. Die Zahl Null

a) Macht vielen bis in die Sekundärstufe Schwierigkeiten, typische Fehler:

$$5 - 0 = 0; \quad 0 + 4 = 0; \quad 3 * 0 = 3; \quad 0 : 3 = 3$$

b) Modelle zur Erarbeitung der Null:

- Null als Kardinalzahl der leeren Menge
- Null als Differenz zweier Zahlen
- Fragestellungen
- Aufgabenreihen:  $5 + 5; 5 + 4; 5 + 3; 5 + 2; 5 + 1; 5 + ?$   
 $5 - 1; 5 - 2; 5 - 3; 5 - 4; 5 - 5 = ?$

## 6. Der zweite Zehner

zwei sich ergänzende Wege:

- Erarbeitung als Summe aus 10 und einem Einer
- Erarbeitung durch Verdopplung sowie durch die Operationen +1, -1
- dazu: Vorgänger, Nachfolger, Zwischenzahl

## 7. Zahlenstrahl

Schwierigkeit, dass mehrere Zahlaspekte zusammentreffen:  
 Maßzahl, Kardinalzahl, Ordnungszahl und Zählzahl

## 8. Übungen und Spiele

z.B. 
$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 3 & & 7 & & 1 \\ & 2 & & 4 & & 6 & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & & & & 0 & & \end{array} \Rightarrow \text{Trichter}$$

## K. Größen und Sachaufgaben

Bereich mit größten Lehr- und Lernschwierigkeiten

### 1. Größen im Mathematikunterricht der Grundschule:

Größen	Einheiten	Repräsentanten
Längen	km, m, dm, cm, mm	Strecken, Stäbe, Kanten
Geldwerte	€, Cent, (DM, Pf)	Geldscheine, Münzen
Gewichte (Massen)	t, kg, g, mg	Körper, Gegenstände
Zeitspannen	Jahr, Monat, Tag, h, min, sec	Abläufe, Vorgänge
Flächengrößen	(km <sup>2</sup> , m <sup>2</sup> , ha, a)	Flächenstücke, Platten
Rauminhalte	l, hl, (m <sup>3</sup> , cm <sup>3</sup> )	Körper, Gefäße

## 2. Erarbeitung der zugehörigen Einheiten in den Klassen der Grundschule

	Natürliche Zahlen	Einheiten
1. Schuljahr	ZR bis 20	€, Cent; (Pfennig, DM) cm, [dm], m, mm
2. Schuljahr	ZR bis 100	Jahr, Monat, Woche, Tag, h, min
3. Schuljahr	ZR bis 1000	dm, km, sec, l, hl, ml kg, g, (Pfund, Zentner)
4. Schuljahr	ZR bis 1 000 000	t, [1 dt = 100 kg], [m <sup>3</sup> ]

## 3. Ziele des Arbeitens mit Größen

- Aufbau der Vorstellung einzelner Größen
- Erarbeitung der Größenbegriffe
- Fähigkeit, Größen umzuwandeln
- Rechnen mit Größen

## 4. Didaktische Stufenfolge bei der Erarbeitung eines Größenbereichs

1. Erste Erfahrungen in Sach- und Spielsituationen
2. direkter Vergleich von Repräsentanten einer Größe
3. Indirekter Vergleich mit Hilfe willkürlicher Maßeinheiten
4. Erkennen der Invarianz einer Größe (z.B. Schnur hängend oder gespannt)
5. indirekter Vergleich mit Hilfe standardisierter Maßeinheiten
6. Entwicklung einer Vorstellung der standardisierten Einheitsgrößen
7. Messen mit technischen Hilfsmitteln
8. Verfeinern und Vergrößern der Maßeinheiten
9. Rechnen mit Größen, insbesondere Anwendungssituationen
  - Weitere Möglichkeiten zum Größenvergleich (Gewicht, Zeit, Geld, Volumen)

## 5. Die drei Typen von Sachaufgaben

(Beispiele siehe Kapitel M. ! Siehe auch [Radatz/Schipper, S. 130])

- 1) **abstrakte Textaufgaben** (verbalisierte Zahlaufgaben), in Worte **eingekleidete** Aufgaben, meist ohne Realitätsbezug und Denksportaufgaben [z.B. M.1, 7, 8]
- 2) **Textaufgaben:** Sache meist sekundär und austauschbar, Schwerpunkt des traditionellen Sachrechnens
- 3) **Sachaufgaben und Sachprobleme:** Sache wird ebenfalls diskutiert. Daten müssen häufig noch gesammelt werden, z. B. für Schulausflug. oft fächerübergreifend [z.B. M.16, 17 oder "Hungersnot in der Welt"-Aufgabe]

## 6. Die fünf Ziele des Sachrechnens

- 1) Beziehungsinhaltigkeit der Mathematik
- 2) Mathematisieren realer Situationen
- 3) Schulung des komplexen und kreativen Denkens
- 4) Sicherung mathematischen Könnens durch Anwendung
- 5) Aufbau von Größenvorstellungen

## 7. Schema zur Lösung von Sachaufgaben

Methodisch- didaktische Bearbeitungshilfe:

1. Lies die Aufgabe und suche **alle wesentlichen** Angaben heraus!
2. Veranschauliche den Zusammenhang durch eine **Skizze**!
3. Suche die **Zwischenfragen** in der richtigen Reihenfolge!
4. Gib die **Rechenoperationen** in der richtigen Reihenfolge an!
5. Stelle die **Gleichungen** in der richtigen Reihenfolge auf und löse sie!
6. Nenne oder schreibe die **Antwort**!
7. **Überprüfe** Deine Antwort!

## 8. Varianten der Darbietung

Tabellen – Daten – Prospekte – Graphiken – Bildgeschichten – Sprachübungen - strukturierte Darstellung – Simplex - Rechenbaum

## 9. "Neues Sachrechnen" zur Ergänzung:

- Situationen aus dem Schulalltag, der Familie, dem außerschulischen Umfeld
- allgemeine Probleme/ Themen
- mehr Anwendungsorientierung und Umwelterschließung,
- Verbesserungsvorschläge von Schülern

## 10. Gründe für Schwierigkeiten beim Sachrechnen

- Sachstruktur
- sprachlich- syntaktische Struktur
- mathematische Struktur
- Prozessstruktur

---

---

## Literaturhinweise:

Radatz, Hendrik; Schipper, Wilhelm:

Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Schroedel. Hannover 1993

Lauter, Josef:

Fundament der Grundschulmathematik. Pädagogisch- didaktische Aspekte des Mathematikunterrichts in der Grundschule. Auer: Donauwörth 1991

# L. Einige Grundlagen der Grundschulmathematik

## 1. Mengenlehre und Logik

Begründer der Mengenlehre: GEORG CANTOR (1845 Petersburg - 1918 Halle a.d.S.)

Definition: Ein **Menge** ist eine Zusammenfassung von wohlunterschiedenen Objekten unseres Denkens oder unserer Anschauung zu einem Ganzen.

Diese Objekte nennt man **Elemente**  $a$  der Menge  $M$  und schreibt kurz:  $a \in M$

*Wichtige Schreibweisen:*  $a \notin M$  ( $a$  ist **nicht Element** von  $M$ );

$M = \{a, b, c, d, e\}$  (: aufzählende Form einer Mengenschreibweise)

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 7\} = \{3, 4, 5, 6\}$  (lies:  $A$  ist die Menge  $\mathbb{N}$  aller natürlichen Zahlen  $x$  mit der Eigenschaft:  $x$  größer als 2 und zugleich kleiner als 5)

Def. von  $A$  **Teilmenge** von  $B$ :  $A \subseteq B : \Leftrightarrow \forall a \in A$  gilt:  $a \in B$  (für alle Elemente  $a$  aus  $A$  gilt:  $a$  ist auch Element von  $B$ , auch  $A = B$  erlaubt); umgekehrt:  $B$  **Obermenge** von  $A$ :  $B \supseteq A$   
 $A$  ist **nicht** Teilmenge von  $B$ :  $A \not\subseteq B$

Def. der **Restmenge**  $A$  ohne  $B$ :  $A \setminus B := \{a \mid a \in A \wedge a \notin B\}$

Def. der **Vereinigungsmenge**  $C = A \cup B : \Leftrightarrow C = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Für " $\vee$ " lies: "oder" (lat.: vel); frei lassend; nicht "entweder ... oder" (lat.: aut ... aut) !

Entsprechend hat " $\wedge$ " die Bedeutung von "und zugleich".

Def. der **Schnittmenge**  $C = A \cap B : \Leftrightarrow C = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Falls es kein Element in  $A$  gibt, nennt man  $A$  die leere Menge, kurz:  $A = \emptyset$

Falls  $A \cap B = \emptyset$ , dann heißen  $A$  und  $B$  **disjunkt**.

Weitere Zeichen aus der **Logik**:  $\forall$  (für alle);  $\exists$  (es gibt - mindestens - ein Element);  $\neg$  (nicht),  
 $\Leftrightarrow$  (dann und nur dann),  $\Rightarrow$  (daraus folgt)

Wichtiger Satz der Aussagenlogik (nützlich für Beweise):  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

## 2. Begründung der Zahl und der Summe

Zwei Mengen  $A$  u.  $B$  heißen **gleichmächtig**, wenn es eine eindeutige Zuordnung zwischen den Elementen beider Mengen gibt (d.h. keine Elemente übrig bleiben). Kurz:  $|A| = |B|$

Def. der Zahl: Eine **Kardinalzahl**  $a$  ist die gemeinsame Eigenschaft aller gleichmächtiger Mengen. Kurz:  $a = |A| = |B| = |C| = \dots$ . Die Menge aller möglichen Kardinalzahlen ist die Menge aller natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ("fett N") bzw.  $\mathbb{N}_0 (= \mathbb{N} \cup \{0\})$ .

Def. des Additionszeichens: Wenn  $a = |A|$  und  $b = |B|$  und  $A \cap B = \emptyset$ , dann heißt  $a + b := |A \cup B|$  die **Summe** der beiden Zahlen  $a$  und  $b$ . Entsprechend wird die **Differenz**  $a - b := |A \setminus B|$  als Kardinalzahl der Restmenge  $|A \setminus B|$  mit  $B \subseteq A$  definiert.

Def. des Kartesischen Produkts: Seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen. Dann nennt man  $(a, b)$  mit  $a \in A \wedge b \in B$  ein geordnetes **Paar** und die Menge  $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$  das **Kartesische Produkt** von  $A$  und  $B$ .

## 3. Teilbarkeit (Grundmenge ist stets die Menge der natürliche Zahlen):

$a$  heißt **teilbar** durch  $b$ , wenn es ein  $n \in \mathbb{N}$  gibt, so das  $a = b \cdot n$ .

Eine **Primzahl** ist eine nat. Zahl, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar ist.

**ggT** ( $a, b$ ) nennt man den größten gemeinsamen Teiler der beiden nat. Zahlen  $a$  und  $b$

**kgV** ( $a, b$ ) nennt man das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden nat. Zahlen  $a$  und  $b$

Bestimmung durch die Primfaktorzerlegung beider Zahlen; z.B. PFZ  $(168) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$

Man beachte den Satz:  $\text{ggT}(a, b) \cdot \text{kgV}(a, b) = a \cdot b$

## M. Aufgabensammlung zur elementaren Schulmathematik

### 1. Aufgabe: Denksport

Auf einem Schulhof stehen 8 Fahrzeuge, teils mit vier, teils mit zwei Rädern. Zusammen zählt man 22 Räder. Wieviele Fahrzeuge haben 4 Räder und wieviele Fahrzeuge haben 2 Räder?

**Lösung:** 8 Fahrzeuge  
 $x$  Fahrzeuge mit 4 Rädern  
 $y$  Fahrzeuge mit 2 Rädern  
 (i)  $x + y = 8$   
 (ii)  $4x + 2y = 22$   
 aus (i) folgt :  $y = 8 - x$   
 in (ii) eingesetzt :  $4x + 2(8 - x) = 22$   
 $4x + 16 - 2x = 22$   
 $2x + 16 = 22$   
 $2x = 6$   
 $x = 3$

⇒ 3 Fahrzeuge mit 4 Rädern  
 ⇒ 5 Fahrzeuge mit 2 Rädern

### 2. Aufgabe: Binomische Formel

Ergänze die Leerstellen so, dass die Terme  $T_1$  und  $T_2$  bezüglich  $\mathbf{Q}$  äquivalent sind.

$$T_1 = \dots - 20x + \dots \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = (2x - \dots)^2$$

**Lösung:**  $T_1 = 4x^2 - 20x + 25 \quad \Leftrightarrow \quad T_2 = (2x - 5)^2$

### 3. Aufgabe: Quadratische Ergänzung

Forme durch quadratische Ergänzung um. Man bestimme die Art und die Koordinaten des Extremwerts  $S$  des Terms:

$$T(x) = -x^2 + 20x - 76$$

**Lösung:**  $T(x) = -(x^2 - 20x) - 76 = -(x^2 - 20x + 100) - 76 + 100$   
 $T(x) = -(x - 10)^2 + 24$   
 ⇒ Maximum bei  $S(10; 24)$

### 4. Aufgabe: Bruchgleichung

Man bestimme die Definitionsmenge  $\mathbf{D}$  und ermittle die Lösung folgender Gleichung:

$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x+1} \quad ; \quad \mathbf{G} = \mathbf{Q}$$

**Lösung:**  $\mathbf{D} = \mathbf{Q} \setminus \{-1; 0\}$

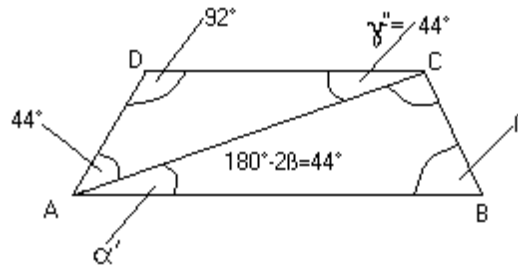
$$\frac{2}{x} = \frac{3}{x+1}$$

$$2x + 2 = 3x \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{L} = \{2\}$$

**5. Aufgabe: Winkel an Parallelen und in Dreiecken**

Im Trapez ABCD gilt:  $[AB] \parallel [DC]$ ,  $\overline{AC} = \overline{AB}$  und  $\overline{CD} = \overline{AD}$ ,  $\delta = 92^\circ$ . Berechne  $\beta$ !

**Lösung:**

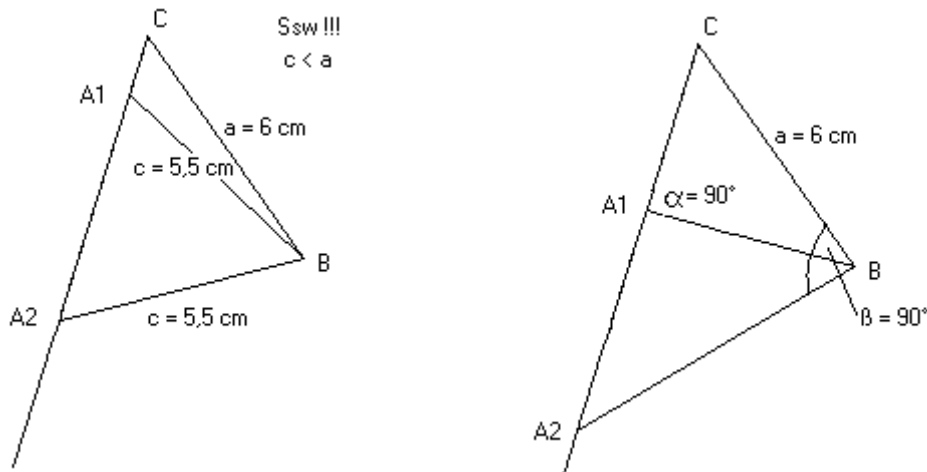


$\alpha + \delta = 180^\circ$  (Wechselwinkel an Parallelen)  
 $\alpha' = \gamma'' = 44^\circ$   
 $2\beta = 180^\circ - 44^\circ$  (wegen  $\overline{AC} = \overline{AB}$ ) und damit  $\Rightarrow \beta = 68^\circ$

**6. Aufgabe: Dreieckskonstruktionen**

Für die Dreiecke  $\Delta A_nBC$  gilt:  $a = 6$  cm und  $\gamma = 55^\circ$  (Winkel bei C). Zeichnen Sie in eine Figur alle Dreiecke für die gilt: a) Die Länge der Seite c beträgt 5,5 cm.  
 b) Ein Innenwinkel beträgt  $90^\circ$ .

**Lösung:** a) Es gibt zwei Lösungen (Kreis um B schneidet zweifach, daher nicht eindeutig).  
 SsW gilt wegen  $c < a$  nicht! b)



$\Rightarrow$  siehe Kongruenzsätze für Dreiecke (kongruent = deckungsgleich)

**7. Aufgabe: Eine merkwürdige Altersbestimmung**

Tom ist 24 Jahre alt. Er ist doppelt so alt wie Jan war, als Tom so alt war, wie Jan heute ist.

**Lösung:**

Es sei a die Zeit, vor der Tom so alt war, wie Jan heute ist, d.h.

(I)  $24 - a = x$   
 (II)  $24 = 2(x - a)$   
 (I) in (II)  $24 = 2[(24 - a) - a]$   
 $24 = 48 - 4a$   
 $4a = 24$   
 $a = 6$   
 (i)'  $x = 24 - 6 = 18 \Rightarrow$  Jan ist 18 Jahre alt.

### 8. Aufgabe: Intelligenztest

Matthias tanzt mit Andrea. Er möchte wissen wie alt sie ist. Er sagt, er sei 28. Sie sagt: "Damit bist Du genau doppelt so alt wie ich war, als Du so alt warst, wie ich es heute bin."

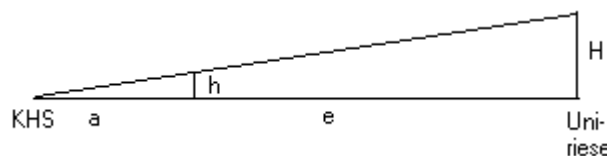
**Lösung:** x sei das Alter von Andrea

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad & 28 - a = x \\
 \text{(ii)} \quad & 28 = 2(x - a) \\
 \text{(i) in (ii)} \quad & 28 = 2[(28 - a) - a] \\
 & 28 = 56 - 4a \\
 & 4a = 28 \\
 & a = 7 \\
 \text{(i)'} \quad & x = 28 - 7 = 21 \Rightarrow \text{Andrea ist 21 Jahre alt.}
 \end{aligned}$$

### 9. Aufgabe: Wie hoch ist der "Uni-Riese"?

Gegebene durch Messungen gewonnene Werte: Beim Anpeilen von der KHS ist er bei ausgestrecktem Arm (Länge des Armes ca. 70 cm) gerade mal  $h = 4$  cm hoch. Die Entfernung  $e$  des Riesen von der KHS beträgt auf dem Stadtplan, der einen Maßstab von 1: 20 000 hat, 13 cm.

**Lösung:**  $e = 13 \text{ cm} \cdot 20\,000 = 260\,000 \text{ cm} = 2\,600 \text{ m} = 2,6 \text{ km}$   
 Entfernung von der KHS: 2,6 km (Luftlinie)



$a =$  Armlänge,  $h =$  Daumenbreite,  $e =$  Entfernung KHS-Uniriese,  $H =$  Höhe Uniriese

$$\frac{h}{H} = \frac{a}{e}; \quad H = \frac{h \cdot e}{a} = \frac{4 \cdot 2600}{70} \text{ m} = 148 \text{ m}$$

### 10. Aufgabe: Der Fliesenleger kommt

Ein Hörsaal soll auf dem Boden gefliest werden. Er ist  $10\frac{1}{2}$  m (bzw.  $19\frac{1}{2}$  m) lang und 6,30 m (bzw. 9,60 m) breit.

- a) Wieviel Fliesen braucht man, wenn eine Seite von den quadrat. Fliesen  $d = 15$  cm lang ist?
- b) Wieviel Fliesen braucht man, wenn mit rund 10% Verlust zu rechnen ist?

**Lösung:**

a) $10,5 \text{ m} : 0,15 \text{ m} = 70$	<i>Alternative (mit schriftl. Rechnen):</i>
$6,3 \text{ m} : 0,15 \text{ m} = 42$	
Gesamtzahl: $70 \cdot 42 = 2940$	

$$\begin{aligned}
 A &= 10,5 \text{ m} \cdot 6,3 \text{ m} = 66,15 \text{ m}^2 \\
 A : d^2 &= 66,15 \text{ m}^2 : 0,0225 \text{ m}^2 = 2940
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (19,5 \text{ m} : 0,15 \text{ m} &= 130) \\
 (9,6 \text{ m} : 0,15 \text{ m} &= 64) \\
 (\text{Gesamtanzahl: } &130 \cdot 64 = 8320)
 \end{aligned}$$

b) $90\% \Leftrightarrow 2940$ Fliesen	( $90\% \Leftrightarrow 8320$ )
$100\% \Leftrightarrow x$	( $100\% \Leftrightarrow x$ )

$$x = \frac{2940}{90\%} * 100\% \approx 3267 \text{ Fliesen müssen bestellt werden}$$

$$(x = \frac{8320}{90\%} * 100\% \approx 9445)$$

### 11. Aufgabe: Das Hexeneinmaleins

Aus Goethe: Faust I. Teil, Hexenküche (nach Auerbachs Keller)

DIE HEXE (mit großer Emphase, fängt an aus dem Buche zu deklamieren):

Du musst versteh'n

Aus Eins mach Zehn,

und Zwei laß gehen,

und Drei mach gleich,

so bist Du reich.

Verlier' die Vier!

Aus Fünf und Sechs,

so sagt die Hex',

Mach Sieben und Acht,

so ist's vollbracht:

Und Neun ist Eins,

und Zehn ist keins.

Das ist das Hexen-Einmal-Eins!

"schreib' 10 statt 1"

"die Zwei lass steh'n"

"3 bleibt am Ort"

"Setz dorthin 0"

"vertausch die Plätze"

### Lösung:

10	2	3	⇒	15
0	7	8	⇒	15
5	6	4	⇒	15
↓	↓	↓		
15	15	15		

### 12. Aufgabe: Geld-Börsengeschehen

Man rechne zunächst möglichst im Kopf und ohne das Ergebnis zu erraten:

Anja spart  $\frac{1}{5}$  und Susan  $\frac{1}{6}$  ihres Taschengeldes. Die Gesamtersparnis beträgt 20 €, das Taschengeld von beiden beträgt zusammen 110 €. Wie viel Taschengeld bekommt jede?

**Lösung:** Es sei x der Betrags von Anjas und y der von Susans Taschengeld

$$(I) \quad \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}y = 20$$

$$(II) \quad x + y = 110 \Rightarrow y = 110 - x$$

$$(II) \text{ in } (I) \quad \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}(110 - x) = 20$$

$$\Leftrightarrow 6x + 5(110 - x) = 600$$

$$\Leftrightarrow 6x + 550 - 5x = 600$$

$$\Leftrightarrow x + 550 = 600$$

$$\Leftrightarrow x = 50, \text{ d.h. Anja bekommt } 50 \text{ €}$$

$$x + y = 110$$

$$50 + y = 110 \Rightarrow y = 60, \text{ d.h. Susan bekommt } 60 \text{ € an Taschengeld}$$

**13.1 Aufgabe: Wann und wo? (treffen sich zwei Züge)**

Ein Personenzug L fährt mit 80 km/h von Leipzig nach dem 120 km entfernten Dresden. Zu gleicher Zeit verläßt ein Güterzug D Dresden mit 60 km/h in Richtung Leipzig. Wann und wo treffen sich die Züge?

**Lösungsidee:** Geg.:  $v_L = 80$  km/h;  $v_D = 60$  km/h;  $s = 120$  km.  
Ges.: Zeit  $t$  und Entfernung  $x$  (von L) bis zum Treffen

Wenn sie sich treffen, (I) haben beide Züge zusammen die Strecke  $s$  zurückgelegt und (II) waren gleich lang unterwegs.

Also (I)  $x + y = s$   
(II)  $v_L \cdot t + v_D \cdot t = s$ , damit ist  $t(v_L + v_D) = s$ ,

damit ist  $t = \frac{s}{v_L + v_D}$ ; eingesetzt:  $t = \frac{120 \text{ km}}{80 \frac{\text{km}}{\text{h}} + 60 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$

ergibt  $t = 0,857$  h = 51,4 min

L hat dabei zurückgelegt:  $x = v_L t = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0,857 \text{ h} = 68,6$  km

Sie treffen sich nach 51,4 min und in 68,6 km Entfernung von Leipzig.

Allgemein: nach der Zeit  $s : (v_L + v_D)$  und in der Entfernung  $v_L t$  von Leipzig.

**13.2 Aufgabe: Wann und wo? (holt Andrea Max ein)**

Max und Andrea fahren morgens mit dem Fahrrad auf dem gleichen Weg zum 5 km entfernten Hörsaal. Max startet um 8.50 Uhr mit durchschnittlich 15 km/h, Andrea erst 3 Minuten später mit 20 km/h. Holt sie ihn noch vor Ankunft ein? Und wenn ja, bestimmen Sie Zeitpunkt und Ort.

**Lösung:** Geg:  $v' = 15$  km/h;  $v'' = 20$  km/h;  $\Delta t = 3$  min  
Ges: Zeit  $t$  und Entfernung  $x$  bis zum evtl. Einholen

Wenn Andrea Max einholt, dann haben beide die gleiche Strecke geschafft. Daher Ansatz:

$$v' t = v'' (t - \Delta t), \text{ also } t(v' - v'') = -v'' \Delta t$$

$$\text{d.h. } t = \frac{-v'' \Delta t}{v' - v''} = \frac{-20 \frac{\text{km}}{\text{h}} * 3 \text{ min}}{15 \frac{\text{km}}{\text{h}} - 20 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{20 * 3}{5} \text{ min} = 12 \text{ min} = \frac{1}{5} \text{ h}$$

$$\text{also } x = 15 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1}{5} \text{ h} = 3 \text{ km}$$

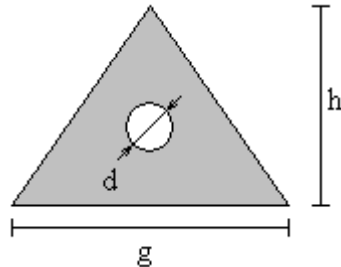
Andrea holt Max bereits nach (12 min – 3 min =) 9 min ein.

Sie hat bis dahin  $20 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 9 \text{ min} = 20 \cdot \frac{9}{60} \text{ km} = 3 \text{ km}$  zurückgelegt.

**14. Aufgabe: Weinbergfeld**

Historische Sachaufgabe: Ein Weinbergfeld hat die Form eines Dreiecks mit 75 m Grundlinie und 64 m Dreieckshöhe. In der Mitte befindet sich ein unangebautes Rondell von 9,80 m Durchmesser. Welchen Weinertrag brachte das Feld, wenn von einem Hektar 3,8 dz geerntet wurden und ein Ztr. mit 460 DM bezahlt wurde.

**Lösung:**



$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} g \cdot h = 75 \text{ m} \cdot 32 \text{ m} = 2400 \text{ m}^2$$

$$A_{\text{Rondell}} = r^2 \cdot \pi = 4,9^2 \text{ m}^2 \cdot \pi = 75,39 \text{ m}^2$$

$$A = 2400 \text{ m}^2 - 75 \text{ m}^2 = 2325 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ ha} = 10000 \text{ m}^2; \quad 1 \text{ dz (Doppelzentner)} = 100 \text{ kg !}$$

$$10000 \text{ m}^2 \hat{=} 380 \text{ kg} \quad x = \frac{380 \text{ kg} \cdot 2325 \text{ m}^2}{10000 \text{ m}^2} = \frac{883500 \text{ kg}}{10000}$$

$$2325 \text{ m}^2 \hat{=} x \quad x = 88,35 \text{ kg}$$

$$50 \text{ kg} \hat{=} 460 \text{ DM} \quad x = \frac{88,35 \text{ kg} \cdot 460 \text{ DM}}{50 \text{ kg}}$$

$$88,35 \text{ kg} \hat{=} x \quad x = 813 \text{ DM}$$

**15. Aufgabe: Sylvesterparty**

Zwei Uhrzeiger freuen sich auf das neue Jahr. Doch ach, kaum war es 24 Uhr, müssen sie sich schon wieder trennen und tanzen weiter – im Kreis.

a) Wann treffen sie sich zum ersten Mal wieder (nach wieviel Sekunden) ?

b) Wann finden jeweils die nächsten Treffen statt?

Ein möglicher Lösungsweg: Was ist beim nächsten Treffen der zwei Zeiger gleich?

→ 1. der Zeitablauf  $t$  und 2. der zurückgelegte Winkel  $\alpha$  gegenüber dem letztem Treffen

Gesucht: der zu diesem Winkel  $\alpha$  zugehörige Zeitablauf  $t$  in Sekunden (s)

seit 12 Uhr bis zum ersten erneuten Treffen

*Großer Zeiger:* Winkel  $\alpha$  verhält sich zur Zeit  $t$  wie  $360^\circ$  zu  $3600 \text{ s}$  [Winkelgeschw. =  $\alpha : t$ ],

$$\text{d.h. } \alpha : t = 360^\circ : 3600 \text{ s (Kürzen mit 360 !)} \text{ und damit (I) } \alpha = \left( \frac{t}{10} \right)^\circ$$

*Kleiner Zeiger:* Winkel  $\beta$  verhält sich zur Zeit  $t$  wie  $(360^\circ : 12 =) 30^\circ$  zu  $3600 \text{ s}$ ;

$$\text{d.h. } \beta : t = 30^\circ : 3600 \text{ s und damit (II) } \beta = \left( \frac{t}{12 \cdot 10} \right)^\circ$$

Das Winkelmaß springt nach  $360^\circ$  immer wieder auf Null; d.h. der große Zeiger legt eine volle Umrundung ( $360^\circ$ ) und den Teilwinkel  $\alpha - 360^\circ$  zurück, bevor sich die Zeiger das nächste Mal treffen. Also gilt für die zurückgelegten Winkel der zwei Zeiger:  $\alpha - 360^\circ = \beta$ .

Nun wird (I) und (II) für  $\alpha$  und  $\beta$  eingesetzt, das ergibt  $\left(\frac{t}{10}\right)^\circ - 360^\circ = \left(\frac{t}{12 \cdot 10}\right)^\circ$

Auflösung nach t ergibt:  $12 \cdot t - 360 \cdot 120 = t$

$$11 \cdot t = 360 \cdot 120 (= 12 \cdot 3600); t = 43\,200 : 11 = 3\,927 \frac{3}{11}$$

Sie treffen sich nach  $t = 3927 \frac{3}{11}$  Sek. wieder (das sind 1 h 5 min  $27 \frac{3}{11}$  s oder  $65 \frac{5}{11}$  min).

b) Alle 12 Stunden treffen sich die Zeiger 11mal, jeweils nach Ablauf von  $3927 \frac{3}{11}$  Sekunden.

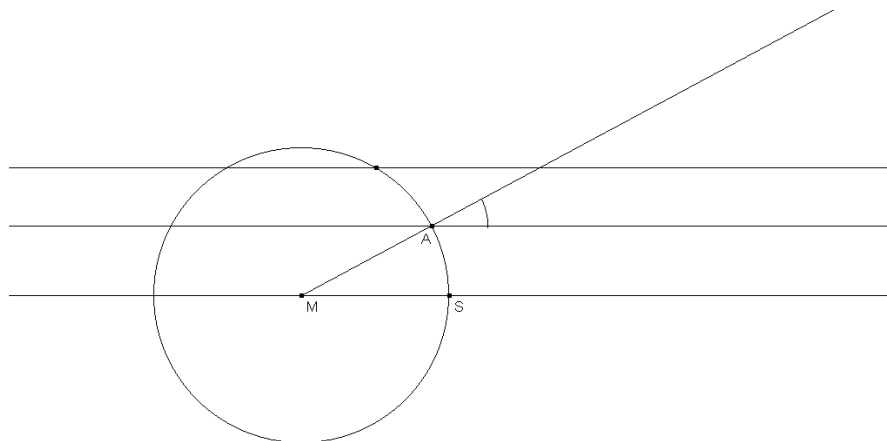
### 16. Aufgabe: Wie konnte ERATOSTHENES (220 v.Chr.) den Erdumfang bestimmen?

Zur Sommersonnenwende spiegelte sich in seinem Urlaubsort Syene (S) die Sonne in einem tiefen Brunnen, in seiner Heimat Alexandrien (A) jedoch nicht. ERATOSTHENES bestimmte daraufhin den Winkel  $\varphi$  der Sonnenstrahlen gegenüber der Zenitrichtung:  $\varphi = 7^\circ 12'$ .

Er kannte auch die Entfernung der beiden Orte:  $AS = 5000$  Stadien (1 Stadion  $\approx 157,5$  m).

#### Lösung:

Geg.:  $\angle AMS = \varphi = 7^\circ 12'$ ,  $AS = 5000$  Stadien ; Ges.: Erdumfang u



Man ergänze die Skizze! Woher kommen die Sonnenstrahlen? Wo könnte Leipzig liegen? Weshalb ist  $\angle AMS = \varphi$  ?

$$u : AS = 360^\circ : \varphi, \text{ also } u = AS \cdot (360^\circ : \varphi) = 5000 \text{ St.} \cdot (360^\circ : 7^\circ 12') = \\ = 5000 \text{ St.} \cdot (360^\circ : 7,2^\circ) = 5000 \text{ St.} \cdot 50 = 250\,000 \text{ St.}$$

Umrechnung:

Der Erdumfang u ergibt sich daraus zu  $250\,000 \cdot 157,5 \text{ m} = 39\,375 \text{ km}$ .

Heutiger Wert: 40 000 km.

### 17. Aufgabe: Euro-Umstellung ("Es war einmal ...")

1. Sandra wollte unbedingt Gerhard Polt und die Biermösl Blosn am 16. Januar im Schulspielhaus sehen.

a) Sie leistete sich eine Karte der mittleren Kategorie und zahlte dafür im Vorverkauf 20,50 Euro + 2,- Euro Vorverkaufsgebühr.

Sie schätzt ab: 22,50 € sind etwa doppelt so viel in DM, also 45,- DM. Doch ist 1 € nicht genau 2 DM. Ist die Karte - umgerechnet in DM - teurer oder billiger als 45 DM?

b) Bekannt: 1 € = 1,95583 DM. Wie groß ist der Unterschied gegenüber dem geschätzten Zweifachen in Prozent (auf zwei Stellen genau) ?

c) Wieviel DM kostete die Karte insgesamt genau?

2. Katrin hat Glück und bekommt noch eine (nur an der Abendkasse ermäßigte) Studentenkarte zu 17,50 Euro.



a) Wieviel % vom regulären Vorverkaufspreis hat sie dadurch gespart?

b) Wie hoch ist die prozentuale Erhöhung, wenn die reguläre Karte früher 36,- DM + 4,- DM Vorverkaufsgebühr kostete?

*Ergebnisse:*

1. a) etwas billiger als das Doppelte;

1. b)  $4,42 : 2 \rightarrow 2,21\% \approx 2,2\%$ ;

1. c)  $22,50 \cdot 1,95583 = 44,01$  DM.

2. a)  $5 : 22,50 = 22,2\%$ ;

2. b)  $44,01 - 40,00 = 4,01 \rightarrow 10\%$

Gerhard Polt (Wissenschaftler, Denker & "Urvieh")

3. Ein Fernglas mit 25 % Rabatt kostet 96,- €. Welches war der ursprüngliche Preis?

*Ergebnis:*

$$96,- : (1 - 25\%) = 96,- : 0,75 = 128,- \text{ €}$$

### 18. Funktionale Abhängigkeit ("Die Hälfte ist jeder zweite ...")

a) **direkt proportional:** z.B. Stückzahl a und Preis b

Der n-fachen Stückzahl entspricht der n-fache Preis.

$$a \text{ St.} \hat{=} b \text{ €}$$

$$c \text{ St.} \hat{=} x \text{ €}$$

$$x = \frac{b \text{ Euro} \cdot c \text{ St.}}{a \text{ St.}}$$

*Merke: "Rechts oben durch links oben mal links unten!"*

**b) indirekt (umgekehrt) proportional:**

z.B. Geschwindigkeit  $v$  und Zeit  $t$  (bei gleichem Weg)

Der  $n$ -fachen Geschwindigkeit entspricht der  $n$ -te Teil der Zeit.

$$\begin{aligned}v \text{ km/h} & \hat{=} t \text{ h} \\w \text{ km/h} & \hat{=} x \text{ h} \\x & = \frac{t \text{ h} \cdot v \text{ km/h}}{w \text{ km/h}}\end{aligned}$$

*Merke: "Rechts oben mal links oben durch links unten!"*

**Aufgaben-Beispiele:****18.1 Hungrige Kühe**

Drei *Kühe* fressen an einem Tag etwa den Jahresertrag von  $36 \text{ m}^2$  Wiese. Bauer Hinz hat in seinem Stall 20 Kühe. Wieviel Wiesengrund braucht er? Man schätze zuerst!

*Lösung:*

Geg.: 3 Kühe pro Tag  $36 \text{ m}^2$ . Ges.:  $x$  in  $\text{m}^2$  für 20 Kühe pro Jahr

$$3 \text{ K.} \hat{=} 36 \text{ m}^2 \text{ pro Tag}$$

$$3 \text{ K.} \hat{=} 36 \text{ m}^2 \cdot 365 \text{ pro Jahr}$$

$$20 \text{ K.} \hat{=} x \text{ m}^2 \text{ pro Jahr}$$

$$x = \frac{36 \text{ m}^2 \cdot 365 \cdot 20 \text{ K.}}{3 \text{ K.}} = 87600 \text{ m}^2 = 8 \text{ ha } 76 \text{ a}$$

Bauer Hinz benötigt 8 ha 76 a Wiesengrund.

**18.2 Klassenfahrt ins Grüne**

Die 28 Schüler der Klasse 5 a haben für ihre *Klassenfahrt ins Grüne* einen Bus gemietet. Jeder Schüler muß  $10,50 \text{ €}$  bezahlen. Vor der Fahrt kommen zwei neue Schüler in die Klasse. Wie hoch ist der Fahrpreis nun pro Schüler?

*Lösung:* 28 Sch.  $\hat{=} 10,50 \text{ €}$

$$30 \text{ Sch.} \hat{=} x \text{ €}$$

$$x = (10,50 \text{ €} \cdot 28 \text{ Sch.}) : 30 \text{ Sch.} = 9,80 \text{ €}$$

**18.3 Expedition durch die Sahara**

Eine 7köpfige *Expedition* will die Wüste Sahara in 42 Tagen durchqueren. Ihr Wasservorrat ist so berechnet, daß jeder täglich  $3,5 \text{ l}$  verbrauchen darf. Nach 12 Tagen treffen sie auf 3 halbverdurstete Beduinen, die in einen Sandsturm geraten waren und nehmen sie bei sich auf.

a) Wieviel Liter Wasser darf jetzt jede Person täglich verbrauchen, wenn die Expedition wie geplant durchgeführt werden soll?

b) Nach wieviel Tagen müßten sie eine Oase erreichen, wenn jede Person täglich genausoviel Wasser wie vorher verbrauchen würde?

*Lösung:*

7 P. bei 42 d à 3,5 l, d.h. Gesamtvorrat:  $7 \cdot 42 \cdot 3,5 \text{ l} = 294 \cdot 3,5 \text{ l} = 1029,0 \text{ l}$

7 P. bei 12 d à 3,5 l, d.h. Verbrauch in den 12 d ist  $7 \cdot 12 \cdot 3,5 \text{ l} = 294,0 \text{ l}$

a) Der Vorrat nach 12 d von  $1029,0 \text{ l} - 294,0 \text{ l} = 735,0 \text{ l}$  soll für 10 P. noch 30 d reichen, d.h. pro Person stehen  $735,0 : (10 \cdot 30) \text{ l} = 2,45 \text{ l}$  täglich zur Verfügung.

b) Falls jede der 10 Personen täglich 3,5 l verbraucht, reicht der Vorrat von  $735,0 \text{ l}$  nur noch  $735,0 \text{ l} : (10 \cdot 3,5 \text{ l/d}) = 21 \text{ d}$ .

## 19. Prozentrechnung

Grundregel: 1 Prozent, d.h. 1 %, bedeutet immer ein Hundertstel!

Also sind 15 % nur eine andere Schreibweise für  $\frac{15}{100}$ .

**Prozentsatz mal Grundwert ergibt den Prozentwert.**

z.B. Preisnachlaß: 15 % von 500,- € sind 75,- €,

da  $15 \% \cdot 500,- = (15:100) \cdot 500,- = 75,-$

### Aufgaben-Beispiele:

#### 19.1 Beim Gasgeben und Bremsen

a) Eine *Paßstraße* hat eine durchschnittliche Steigung von 10 %. Sie ist bis zur Paßhöhe 6 km lang. Wieviel Höhe hat man dann gewonnen?

b) Das *Stilfser Joch* liegt 2757 m über dem Meeresspiegel. Wie groß ist die durchschnittliche Steigung, wenn die Straße bis zum Joch 18 km lang ist und der Talort in 600 m Höhe liegt?

[Straßenlänge  $l = 18.000 \text{ m}$ ; Höhendifferenz  $\Delta h = 2757 \text{ m} - 600 \text{ m} = 2157 \text{ m}$ ;

$\Delta h : l = 2157 \text{ m} : 18.000 \text{ m} = 0,1198$ , d.h. rd. 12 % Steigung]

#### 19.2 Last der Abgaben

Der Lehrerin S. aus L. werden von ihrem Gehalt monatlich 30 % an *Sozialabgaben und Einkommensteuer*, das sind 1080,- €, einbehalten. Wie hoch ist ihr monatliches Bruttoeinkommen? Wieviel Prozent betragen die Abzüge im Jahr?

## 20. Verschiedene Zahlensysteme

**Ziffern** im

Zehnersystem: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Zweiersystem: 0,1

Dreiersystem: 0,1,2

Fünfersystem: 0,1,2,3,4

**20.1 Zahlen in verschiedenen Zahlensystemen**

Zehnersystem	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Zweiersystem					100						1010
Dreiersystem									22		
Fünfersystem										14	

**20.2 Dualsysteme im Computer**

Computer arbeiten mit dem Zweiersystem (Dualsystem). Man rechne die Zahl 39 um in das

a) Zweiersystem:

$$39 =$$

b) Dreiersystem:

$$39 =$$

c) Fünfersystem:

$$39 =$$

**20.3 Man wandle in das Zehnersystem um:**

a)  $111001_2 =$

b)  $42_5 =$

c)  $321_4 =$

---



---

**N. Das Böhmisches Dorf**

Palmström reist mit einem Herrn v. Korf,  
in ein sogenanntes böhmisches Dorf.

Unverständlich bleibt ihm alles dort,  
vom ersten bis zum letzten Wort.

Auch v. Korf (der nur des Reimes wegen  
ihn begleitet) ist um Rat verlegen.

Doch just dieses macht ihn blaß vor Glück.  
Tief entzückt kehrt unser Freund zurück.

Und er schreibt in seine Wochenchronik:  
Wieder ein Erlebnis, voll von Honig!

Christian Morgenstern (Palmström 1910)