Semantik
1. Wahrheitsbedingungen-Semantik und das Fregesche Programm

Fabian Heck
(basierend auf Folien von Gereon Müller)
Institut für Linguistik
home.uni-leipzig.de/heck

Allgemeines

Vorlesung:
Dienstag, 11:15–12:45
HSG, HS 4

Übung:
Johannes Schneider
Mittwoch, 11:15–12:00
HSG, HS 10

Tutorium:
Mark Bauer
Donnerstag, 13:15–14:45
SG, S210

Literatur:
Irene Heim & Angelika Kratzer, Semantics in Generative Grammar, Oxford, 1998.

Wahrheitsbedingungensemantik

Grundannahme:

- Die Bedeutung eines (Aussage-)Satzes zu kennen heißt zu wissen, unter welchen Bedingungen der Satz wahr ist, und unter welchen Bedingungen er falsch ist.

(1) In meiner Speisekammer ist ein Sack Kartoffeln.

(2) Wahrheitsbedingungen:
Der Satz "In meiner Speisekammer ist ein Sack Kartoffeln" ist wahr genau dann, wenn in meiner Speisekammer ein Sack Kartoffeln ist.

(3) Schema für Wahrheitsbedingungen:
Der Satz "_______" ist wahr genau dann, wenn _______.

Frege über Kompositionalität

Gottlob Frege (1848–1925; Jena): Logik, Mathematik, Philosophie, sowie Beginn der modernen Semantik. Begründer des Kompositionalitätsprinzips.

(4) Kompositionalitätsprinzip
Die Bedeutung eines komplexen sprachlichen Ausdrucks ergibt sich allein aus der systematischen Kombination der Bedeutungen seiner Teile.

(5) Freges Vermutung:
Die logische Kombination von Teilen zu einem Ganzen erfolgt immer so, dass etwas nicht Saturiertes zu etwas Saturiertem wird.

Anwendung:
Der Satz "Caesar eroberte Gallien" wird aufgespalten in "Caesar" und "eroberte Gallien". Der erste Teil ist saturiert; der zweite Teil ist nicht saturiert, er beinhaltet eine Leerstelle. Die Bedeutung des nicht saturierten Teils, ist eine Funktion.

Mengen

- Menge = Sammlung von Dingen: Elemente.
- Element-Relation: $\in$. $x \in A$: x ist ein Element von A.
- Es gibt endliche (finite) und unendliche (nicht-finite) Mengen.
- Leere Menge: $\emptyset$
- Zwei Mengen sind identisch gdw. sie die gleichen Elemente haben.
- Zwei Mengen sind disjunkt gdw. sie keine Elemente teilen.
- Eine Menge ist eine Teilmenge einer anderen Menge, wenn jedes Element, das in ihr ist, auch in der anderen Menge ist: $A \subseteq B$.
- Echte Teilmenge: $A \subset B$
- Schnittmenge: $A \cap B$
- Vereinigungsmenge: $A \cup B$
- Komplement von A in B: $B - A$

Spezifizierung von Mengen

Zwei Möglichkeiten:

- Auflistung
- Abstraktion

(6) Auflistung:

a. Sei A die Menge, deren Elemente a, b, c sind, und sonst nichts.

b. $A := \{a, b, c\}$

(7) Abstraktion durch Bedingung:

a. Sei A die Menge aller Katzen.

b. Sei A die Menge, die genau diejenigen x enthält, für die gilt, das x eine Katze ist.

c. $A := \{x : x \text{ ist eine Katze}\}$

Variable:
x steht hier nicht für ein bestimmtes Objekt; x ist vielmehr eine Variable.

Konsequenz:
Um herauszubekommen, ob ein gegebenes Individuum wie z.B. Kaline in dieser Menge ist (Kaline $\in$ A), muss man ermitteln, ob Kaline eine Katze ist oder nicht. Falls das wahr ist, gilt: Kaline $\in$ A. Falls nicht, gilt: Kaline $\notin$ A.

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 1

Q1: Wieso braucht man Variablen (Platzhalter)?

(8) a. {x : x ist eine positive ganze Zahl kleiner als 7}
b. {_ : _ ist eine positive ganze Zahl kleiner als 7}

A1: Variablen erlauben eine recht einfache Charakterisierung komplexer Mengen. So gibt es z.B. Mengen, für deren Charakterisiserung man mehr als einen Platzhalter braucht.

(9) {_ : {_ : _ mag _} = Ø}
a. {x : {y : x mag y} = Ø} → die Dinge, die nichts mögen
b. {x : {y : y mag x} = Ø} → die Dinge, die von nichts gemocht werden

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 2

Q2: Gibt es zwischen (9-b) (= (10-a)) und (10-b) einen Unterschied?

(10) a. $\{x : \{y : y \text{ mag } x\} = \emptyset\}$ → die Dinge, die von nichts gemocht werden

b. $\{y : \{x : x \text{ mag } y\} = \emptyset\}$ → die Dinge, die von nichts gemocht werden

A2: Nein.

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 3

Q3: Warum muss immer links vom Doppelpunkt etwas stehen?

(11) a. $\{$x : x ist eine positive ganze Zahl kleiner als 7$\}$
b. $\{$x ist eine positive ganze Zahl kleiner als 7$\}$

A3: Das funktioniert wieder nicht, wenn man mehr als eine Variable haben will.

(12) a. $\{x : \{y : x \text{ mag } y\} = \emptyset\}$ $\rightarrow$ die Dinge, die nichts mögen
b. $\{x : \{y : y \text{ mag } x\} = \emptyset\}$ $\rightarrow$ die Dinge, die von nichts gemocht werden

(13) $\{ \{x \text{ mag } y\} = \emptyset\}$
a. $\rightarrow$ die Dinge, die nichts mögen?
b. $\rightarrow$ die Dinge, die von nichts gemocht werden?

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 4

Q4: Was bedeutet (14)?

(14) $\{$Kalifornien : Kalifornien ist ein Staat an der Westküste$\}$

A4: Nichts.

(15) $\{$x : x ist ein Staat an der Westküste$\}$

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 5

Q5: Woher weiß man, was ein Platzhalter (eine Variable) ist und was nicht?

(16)
a. Kalifornien, ...
b. a, b, c, ...
c. x, y, z, ...

A5: Keine generelle Antwort. Es gibt aber übliche Konventionen.

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 6

Q6: Was passiert, wenn rechts vom Doppelpunkt der Platzhalter von links nicht wieder aufgenommen wird?

(17) $\{$x : Kalifornien ist ein Staat an der Westküste$\}$

A6: Merkwürdig, aber nicht inkohärent.

(18)
a. die Menge aller Dinge, die es gibt, wenn Kalifornien ein Staat an der Westküste ist
b. die leere Menge, wenn Kalifornien kein Staat an der Westküste ist

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 7

Q7: Illegale Substitutionen, erster Teil. In (19-a) darf man Substitution vornehmen, um zu ermitteln, ob 29 in der Menge ist, aber darf man das auch in (19-b)?

(19) a. $\{x : x + 2 = x^2\}$
b. $\{x : x \in \{x : x \neq 0\}\}$

A7: Nein, darf man nicht. $29 + 2 = 29^2$ kann überprüft werden (es ist falsch), aber das gilt nicht für $29 \in \{29 : 29 \neq 0\}$

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 8

Q8: Illegale Substitutionen, zweiter Teil. War dann (19-b) (= (20)) von vornherein Unsinn?

(20) $\{x : x \in \{x : x \neq 0\}\}$

A8: Nein. Die eingebettete Menge ist die Menge der Dinge, die ungleich 0 sind.

(21)
a. $x \in$ der Menge aller Objekte, die ungleich 0 sind
b. $x \in S$ (wobei gelten soll: $S := \{x : x \neq 0\}$)
c. $x \in \{y : y \neq 0\}$

Jede Spezifikation in (21) identifiziert die exakt gleiche Menge wie die eingebettete Spezifikation in (20). Daher sind äquivalente Alternativen:

(22)
a. $\{x : x \in \{ x : x \neq 0\}\}$
b. $\{x : x \in$ der Menge aller Objekte, die ungleich 0 sind$\}$
c. $\{x : x \in S \}$
d. $\{x : x \in \{y : y \neq 0\}\}$

Konklusion: 29 ist in der Menge aller Objekte, die in der Menge aller Objekte sind, die ungleich 0 sind.

Fragen und Antworten zur Abstraktionsnotation 9

Q9: Illegale Substitutionen, dritter Teil. Gibt es eine gute Strategie, wie man illegale Substitutionen vermeidet?

A9: Am besten benutzt man dieselbe Variablenbezeichnung nicht ein zweites Mal in einer Spezifikation, wenn es die Möglichkeit gibt, auch eine andere Variablenbezeichnung zu verwenden.

Funktionen

- Geordnetes Paar: $<x,y>$. $<x,y> \neq <y,x>$ (es sei denn, $x = y$)
- Relation (zweistellig): Menge von geordneten Paaren
- Funktion: rechts-eindeutige Relation, bei der jedem x genau ein y zugeordnet wird.

(23) Funktion:
Eine Relation f ist eine Funktion gdw. die folgende Bedingung erfüllt ist: Für jedes x gilt: Wenn es y und z gibt, so dass $<x,y> \in f$ und $<x,z> \in f$, dann gilt: $y = z$.

(24) Argumentbereich, Wertebereich:
Sei f eine Funktion. Dann gilt:

a. Der Argumentbereich von f ist $\{x$: es gibt ein y, so dass $<x,y> \in f\}$.
b. Der Wertebereich von f ist $\{y$: es gibt ein x, so dass $<x,y> \in f\}$.

- Mit A als Argumentbereich und B als Wertebereich: Funktion von A nach B.
- Mit C als Obermenge von Wertebereich B: Funktion von A in C.
- $f : A \rightarrow B$
- $f(x) :=$ das einzige y, so dass $<x,y> \in f$.
- f(x): f angewendet auf x, f von x; $f(x) =$ Wert von f für das Argument x; f bildet x auf y ab.
- $f(x) = y$ ist äquivalent zu $<x,y> \in f$

Funktionen: Auflistung und Abstraktion per Bedingung

(25) Auflistung: Menge:
F := {<a,b>, <c,b>, <d,e>}

(26) Auflistung: Tabelle:

$$\begin{bmatrix} a \longrightarrow b \\ c \longrightarrow b \\ d \longrightarrow e \end{bmatrix}$$

(27) Auflistung: Wörter:
Sei F die Funktion f mit Argumentbereich {a, b, c}, so dass gilt: f(a) = f(c) = b und f(d) = e.

Funktionen mit großen und unendlichen Argumentbereichen: Bedingungen.

(28) Bedingung:
Sei F_{+1} diejenige Funktion f, so dass gilt:
$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, und für jedes $x \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x) = x + 1$.
($\mathbb{N}$ ist die Menge der natürlichen Zahlen.)

(29) Bedingung (Variante):
$F_{+1} := f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
Für jedes $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$.