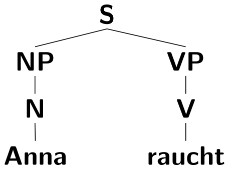
Semantik
2. Ausführung des Fregeschen Programms

Fabian Heck
(basierend auf Folien von Gereon Müller)
Institut für Linguistik
home.uni-leipzig.de/heck

(1)



- Wahrheitsbedingungen
- Wahrheitswerte: 1 (wahr) oder 0 (falsch)
- Bedeutung: Extension (vs. Intension)

(2) Freges Vermutung (Variante):
Alle semantische Komposition ist Funktionalapplikation.

(3) a. Extension von “Anna”: das Individuum Anna
b. Extension von “raucht”: Funktion von Individuen in Wahrheitswerte

(4) Interpretationsfunktion:
$[\![\ ]\!]$ ist die Interpretationsfunktion, die jedem sprachlichen Ausdruck eine passende Bedeutung zuweist. Für jedes α gilt: $[\![\alpha]\!]$ ist die Denotation von α.

Theorie 1: Inventar

(5) Inventar von Denotationen:

Sei D die Menge aller Individuen, die in der wirklichen Welt existieren. Mögliche Denotationen sind dann:

a. Elemente von D, der Menge von tatsächlichen Individuen
b. Elemente von $\{ 0, 1 \}$, der Menge von Wahrheitswerten
c. Funktionen von D nach $\{ 0, 1 \}$

Theorie 2: Lexikon

(6) a. $[\![\textbf{Anna}]\!] = \text{Anna}$
b. $[\![\textbf{Jan}]\!] = \text{Jan}$
c. usw. für andere Eigennamen

(7) a. $[\![\textbf{raucht}]\!] = f : D \longrightarrow \{\ 0, 1\ \}$
Für alle $x \in D$, $f(x) = 1$ gdw. x raucht
b. $[\![\textbf{arbeitet}]\!] = f : D \longrightarrow \{\ 0, 1\ \}$
Für alle $x \in D$, $f(x) = 1$ gdw. x arbeitet
c. usw. für andere intransitive Verben

Theorie 3: Regeln für nicht-terminale Knoten

(S1) Wenn α die Form $[_{\text{S}}\ \beta\ \gamma\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\gamma]\!]([\![\beta]\!])$

(S2) Wenn α die Form $[_{\text{NP}}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

(S3) Wenn α die Form $[_{\text{VP}}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

(S4) Wenn α die Form $[_{\text{N}}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

(S5) Wenn α die Form $[_{\text{V}}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

Anwendung

(8) Zu zeigen:
$[\![\ [_{\text{S}}\ [_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}$ **Anna** $]]\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]]\ ]\!] = 1$ gdw. Anna raucht.

$[_{\text{S}}\ [_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}$ **Anna** $]]\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]]$
(S1): Wenn α die Form $[_{\text{S}}\ \beta\ \gamma\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\gamma]\!]([\![\beta]\!])$
$[_{\text{S}}\ [_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}$ **Anna** $]]\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]] = \alpha$
$[_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]] = \gamma$
$[_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}$ **Anna** $]] = \beta$
Daher gilt:

(9) $[\![\ [_{\text{S}}\ [_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}$ **Anna** $]]\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]]\ ]\!] =$
$[\![\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]\ ]\!]\ ([\![\ [_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}$ **Anna** $]]\ ]\!])$

$[\![\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]\ ]\!]$
(S3) Wenn α die Form $[_{\text{VP}}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$
Daher gilt:

(10) $[\![\ [_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]]\ ]\!] = [\![\ [_{\text{V}}$ **raucht** $]\ ]\!]$

Mehr Anwendung

Also kann (9) zu (11) reduziert werden:

(11) $[\![$ [$_\mathsf{S}$ [$_\mathsf{NP}$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**]] [$_\mathsf{VP}$ [$_\mathsf{V}$ **raucht**]]] $]\!] =$
$[\![$ [$_\mathsf{V}$ **raucht**] $]\!]$ ($[\![$ [$_\mathsf{NP}$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**]] $]\!]$)

$[\![$ [$_\mathsf{V}$ **raucht**] $]\!]$

(S5) Wenn α die Form $[_\mathrm{V}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

Daher wird aus (11) (12).

(12) $[\![$ [$_\mathsf{S}$ [$_\mathsf{NP}$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**]] [$_\mathsf{VP}$ [$_\mathsf{V}$ **raucht**]]] $]\!] =$
$[\![$ **raucht** $]\!]$ ($[\![$ [$_\mathsf{NP}$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**]] $]\!]$)

$[\![$ [$_\mathsf{NP}$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**]] $]\!]$

(S2) Wenn α die Form $[_\mathrm{NP}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

Weitere Reduktion:

(13) $[\![$ [$_\mathsf{S}$ [$_\mathsf{NP}$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**]] [$_\mathsf{VP}$ [$_\mathsf{V}$ **raucht**]]] $]\!] =$
$[\![$ **raucht** $]\!]$ ($[\![$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**] $]\!]$)

$[\![$ [$_\mathsf{N}$ **Anna**] $]\!]$

(S4) Wenn α die Form $[_\mathrm{N}\ \beta\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$

Noch mehr Anwendung

Letzte Reduktion:

(14) $[\![$ [$_S$ [$_{NP}$ [$_N$ **Anna**]] [$_{VP}$ [$_V$ **raucht**]]] $]\!] =$ $[\![$ **raucht** $]\!]$ ($[\![$ **Anna** $]\!]$)

Jetzt erfolgt Interpretation der Lexikoneinträge:

(15) a. $[\![$**Anna** $]\!]$ = Anna
b. $[\![$**raucht**$]\!]$ = f : D $\longrightarrow$ { 0, 1 }
Für alle x $\in$ D, f(x) = 1 gdw. x raucht

(16) $[\![$ [$_S$ [$_{NP}$ [$_N$ **Anna**]] [$_{VP}$ [$_V$ **raucht**]]] $]\!] =$
$\left[\begin{array}{l} \text{f : D} \longrightarrow \{0,1\} \\ \text{Für alle x} \in \text{D, f(x) = 1 gdw. x raucht} \end{array}\right]$ (Anna)

Es gilt also:

(17) $[\![$ [$_S$ [$_{NP}$ [$_N$ **Anna**]] [$_{VP}$ [$_V$ **raucht**]]] $]\!] =$
$\left[\begin{array}{l} \text{f : D} \longrightarrow \{0,1\} \\ \text{Für alle x} \in \text{D, f(x) = 1 gdw. x raucht} \end{array}\right]$ (Anna) = 1 gdw.
Anna raucht.

Wahrheitsbedingungen und Wahrheitswerte

Beobachtung:
Am Ende der Berechnung der Bedeutung von "Anna raucht" steht eine Wahrheitsbedingung, aber kein fixer Wahrheitswert. Der Grund ist, dass die Ermittlung des Wahrheitswerts mehr Weltwissen voraussetzen würde, als wir haben.

Aber:
Wir können so tun, als hätten wir alles relevante Wissen, und ein fiktives Beispiel behandeln, wo wir alles Notwendige wissen; wir haben ein Modell der wirklichen Welt, wo es nur 3 Individuen gibt.

(18) $$[\![\textbf{raucht}]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 1 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 0 \end{bmatrix}$$

Konsequenz:

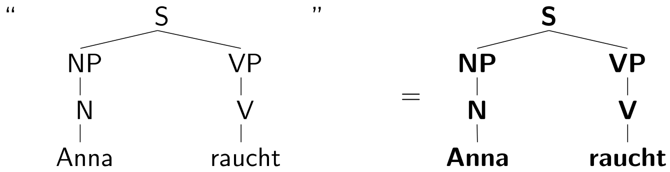
(19) $$[\![\ [_{\mathsf{S}}\ [_{\mathsf{NP}}\ [_{\mathsf{N}}\ \textbf{Anna}\ ]]\ [_{\mathsf{VP}}\ [_{\mathsf{V}}\ \textbf{raucht}\ ]]]\ ]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 1 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 0 \end{bmatrix}$$

$$(\text{Anna}) = 1$$

Objektsprache und Metasprache

Konvention für Objektsprache: “Anna” = **Anna**

(20)



Mengen vs. Funktionen

Annahme:
Einstellige Prädikate (wie z.B. intransitive Verben) denotieren Funktionen von Individuen in Wahrheitswerte.

$[\![\textbf{schläft}]\!] = \mathrm{f} : \mathrm{D} \longrightarrow \{\ 0, 1\ \}$
$\quad$ Für alle $\mathrm{x} \in \mathrm{D}$, $\mathrm{f(x)} = 1$ gdw. x schläft

Alternative Annahme:
Einstellige Prädikate (wie z.B. intransitive Verben) denotieren Mengen von Individuen.

$[\![\textbf{schläft}]\!] = \{\ \mathrm{x} \in \mathrm{D} : \mathrm{x}\ \text{schläft}\ \}$

Beobachtung:
Unter dieser Alternative bräuchte man semantische Interpretationsregeln, die nicht allein Funktionalapplikation instantiieren.

Charakteristische Funktionen

Es gibt Eins-zu-eins-Entsprechungen zwischen Mengen und charakteristischen Funktionen.

(21) Charakteristische Funktion:
Sei A eine Menge. Dann ist $\mathrm{char}_{\mathrm{A}}$, die charakteristische Funktion von A, diejenige Funktion f, so dass für jedes $x \in A$ gilt $f(x) = 1$, und für jedes $x \notin A$ gilt $f(x) = 0$.

Und zurück:

(22) Sei f eine Funktion mit Wertebereich $\{ 0, 1 \}$. Dann ist $\mathrm{char}_{\mathrm{f}}$, die Menge, die von f charakterisiert wird, $\{ x \in D : f(x) = 1 \}$.

Beispiel

Mengen

(23) a. $[\![\textbf{schläft}]\!] = \{ \text{ Anna, Jan } \}$
b. $[\![\textbf{schnarcht}]\!] = \{ \text{ Anna } \}$

(24) a. Anna $\in [\![\textbf{schläft}]\!]$
b. $[\![\textbf{schnarcht}]\!] \subseteq [\![\textbf{schläft}]\!]$
c. $\mid [\![\textbf{schnarcht}]\!] \cap [\![\textbf{schläft}]\!] \mid = 1$ (Die Kardinalität des Schnitts der beiden Mengen ist 1)

Funktionen

(25) $$[\![\textbf{schläft}]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 1 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 0 \end{bmatrix}$$

(26) $$[\![\textbf{schnarcht}]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 0 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 0 \end{bmatrix}$$

Weiter mit Mengen vs. Funktionen

Konsequenz:
Unter der Funktionsnotation werden die Sätze in (24) falsch.

(27) a. Anna $\in [\![\textbf{schläft}]\!]$
Anna ist kein Element einer Menge, deren Elemente geordnete Paare sind: { <Anna,1>, <Jan,1>, <Maria,0> }

b. $[\![\textbf{schnarcht}]\!] \subseteq [\![\textbf{schläft}]\!]$
Ein Element von $[\![\textbf{schnarcht}]\!]$ ist kein Element von $[\![\textbf{schläft}]\!]$ (nämlich <Jan,0>).

c. $|\ [\![\textbf{schnarcht}]\!] \cap [\![\textbf{schläft}]\!]\ | = 1$
(Die Kardinalität des Schnitts der beiden Mengen ist jetzt 2, weil sowohl <Anna,1>, als auch <Maria,0> in beiden Mengen drin sind.)

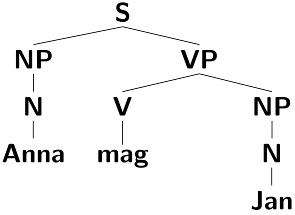
Was tun?

Unter der Funktionsperspektive muss man sich ein wenig anders ausdrücken, um Dinge wie in (24) zu sagen.

(28)
a. $[\![\textbf{schläft}]\!](\text{Anna}) = 1$.
b. Für alle $x \in D$: Wenn $[\![\textbf{schnarcht}]\!](x) = 1$, dann ist $[\![\textbf{schläft}]\!](x) = 1$.
b.' $\{ x : [\![\textbf{schnarcht}]\!](x) = 1 \} \subseteq \{ x : [\![\textbf{schläft}]\!](x) = 1 \}$
c. $| \{ x : [\![\textbf{schnarcht}]\!](x) = 1 \} \cap \{ x : [\![\textbf{schläft}]\!](x) = 1 \} | = 1$

Transitive Verben

(29)



Nebenbemerkung:
Wie beim anderen Satz in diesem Abschnitt ("Anna raucht") ist die syntaktische Struktur hier natürlich strenggenommen falsch: Deutsch ist eine SOV-Sprache mit Ableitung der Hauptsatzwortstellung durch Bewegung des finiten Verbs sowie Topikalisierung einer beliebigen XP in die Position davor. Davon wird hier, weil es im gegenwärtigen Zusammenhang darauf nicht ankommt, abstrahiert.

Denotation transitiver Verben

Stand der Dinge:

- NPs mit nur Eigennamen drin denotieren Individuen.
- VPs denotieren Funktionen von Individuen in Wahrheitswerte.
- Freges Vermutung gilt.

Folgerung:
Transitive Verben wie "mag" denotieren Funktionen von Individuen in Funktionen von Individuen in Wahrheitswerte.

(30) Denotation von "mag":
$[\![\textbf{mag}]\!] = f : D \longrightarrow \{\, g : g \text{ ist eine Funktion von } D \text{ nach } \{\, 0, 1 \,\}\}$
Für alle $x \in D$, $f(x) = g_x : D \longrightarrow \{\, 0, 1 \,\}$
Für alle $y \in D$, $g_x(y) = 1$ gdw. gilt: y mag x.

(31) Knappere Version:
$[\![\textbf{mag}]\!] = f : D \longrightarrow \{\, g : g \text{ ist eine Funktion von } D \text{ nach } \{\, 0, 1 \,\}\}$
Für alle $x, y \in D$, $f(x)(y) = 1$ gdw. gilt: y mag x.

(S6) Wenn α die Form $[_{\mathrm{VP}}\ \beta\ \gamma\ ]$ hat, dann gilt: $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]([\![\gamma]\!])$

Typen

Beobachtung:
Die Denotationen sprachlicher Ausdrücke zeigen wiederkehrende Muster; sie rekurrieren auf Typen.

(32) Saturierte Denotationen:

a. e(ntity) ist der Typ von Individuen. $D_e = D$.
b. t(ruth-value) ist der Typ von Wahrheitswerten. $D_t = \{ 0, 1 \}$

(33) Nicht saturierte Denotationen:

a. $D_{<e,t>} := \{$ f : f ist eine Funktion von D_e nach D_t $\}$.
b. $D_{<e,<e,t>>} := \{$ f : f ist eine Funktion von D_e nach $D_{<e,t>}$ $\}$.

(34) Semantische Typen:

a. e und t sind semantische Typen.
b. Wenn σ und τ semantische Typen sind, dann ist $<\sigma,\tau>$ ein semantischer Typ.
c. Sonst ist nichts ein semantischer Typ.

(35) Semantische Denotationsbereiche:

a. $D_e := D$ (die Menge von Individuen)
b. $D_t := \{ 0, 1 \}$ (die Menge von Wahrheitswerten)
c. Für beliebige semantische Typen σ und τ gilt: $D_{<\sigma,\tau>}$ ist die Menge aller Funktionen von D_σ nach D_τ.

Schönfinkelisierung

Beobachtung:

- Klassischerweise werden zweistellige Prädikate wie "mag" als Relationen betrachtet.
- In Funktionsnotation würde das erstmal heißen: Die Denotation von "mag" ist eine Funktion von geordneten Paaren von Individuen in Wahrheitswerte.

(36)
$$[\![\textbf{mag}]\!] = \begin{bmatrix} <\text{Anna, Anna}> & \longrightarrow 1 \\ <\text{Anna, Maria}> & \longrightarrow 1 \\ <\text{Anna, Jan}> & \longrightarrow 0 \\ <\text{Maria, Maria}> & \longrightarrow 1 \\ <\text{Maria, Anna}> & \longrightarrow 1 \\ <\text{Maria, Jan}> & \longrightarrow 0 \\ <\text{Jan, Jan}> & \longrightarrow 0 \\ <\text{Jan, Anna}> & \longrightarrow 1 \\ <\text{Jan, Maria}> & \longrightarrow 0 \end{bmatrix}$$

Problem:
Dies ist nicht vereinbar mit dem Kompositionalitätsprinzip, weil sich die Bedeutung des Satzes nicht aus der Bedeutung des Subjekts und der Bedeutung der VP in systematischer Weise ergibt: Die VP kann hier keine Denonation zugewiesen bekommen.

Rechts-nach-links-Schönfinkelisierung

Dieses Problem wird durch Schönfinkelisierung im gegenwärtigen System vermieden; die VP erhält eine Denotation (Funktion von Individuen in Wahrheitswerte).

(37) $$[\![\textbf{mag}]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 1 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 1 \end{bmatrix} \\ \text{Maria} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 0 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 1 \end{bmatrix} \\ \text{Jan} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 0 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 0 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

(38) $$[\![[_{\text{VP}}\ [_{\text{V}}\ \textbf{mag}\ ]\ [_{\text{NP}}\ [_{\text{N}}\ \textbf{Anna}]]]]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 1 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 1 \end{bmatrix}$$

Bemerkung:
Dies ist eine Rechts-nach-links-Schönfinkelisierung der ursprünglichen Relation (bzw. charakteristischen Funktion davon): Das Zweitglied der Relation (das Objekt) wird zuerst verarbeitet.

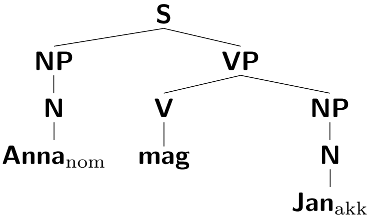
Links-nach-rechts-Schönfinkelisierung

$$(39) \qquad [\![\textbf{mag}]\!] = \begin{bmatrix} \text{Anna} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 0 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 1 \end{bmatrix} \\ \text{Maria} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 0 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 1 \end{bmatrix} \\ \text{Jan} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Anna} & \longrightarrow 1 \\ \text{Jan} & \longrightarrow 0 \\ \text{Maria} & \longrightarrow 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Hier nimmt das Verb zunächst das Subjekt als Argument, und danach erst das Objekt. Dies würde implizieren, dass das Subjekt mit dem Verb syntaktisch eine Konstituente unter Ausschluss des Objekts bildet, und ist also falsch.

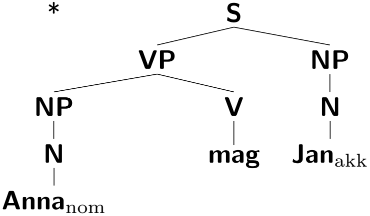
Satzstrukturen, korrekt und inkorrekt

(40) Rechts-nach-links-Schönfinkelisierung



(41) Links-nach-rechts-Schönfinkelisierung

*



Definition von Funktionen in der Lambda-Notation

(42) Nachfolgerfunktion:

F_{+1} := f : $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

Für jedes x $\in \mathbb{N}$, f(x) = x + 1.

(43) Alternative Notation:

F_{+1} := [λx : x $\in \mathbb{N}$. x + 1]

Umgangssprachlich:

F_{+1} ist die (kleinste) Funktion, die jedes x, für das gilt, das x in $\mathbb{N}$ ist, auf x + 1 abbildet.

(44) Schema:

a. [$\lambda\alpha : \phi \, . \, \gamma$]

b. die kleinste Funktion, die jedes α, so dass ϕ, auf γ abbildet.

Terminologie:

- α: Argumentvariable (argument variable)
- ϕ: Bereichsbedingung (domain condition)
- γ: Wertebeschreibung (value description)

Lambda-Ausdrücke und Argumente

λ-Ausdrücke können als Funktionen auf Argumente angewendet werden.

(45) Nachfolgerfunktion:
$[\ \lambda x : x \in \mathbb{N}\ .\ x + 1\ ]\ (5) = 5 + 1 = 6.$

Beobachtung:
Die λ-Notation ist in ihrer Ausdruckskraft beschränkt;
Fallunterscheidungen können erstmal nicht ausgedrückt werden.

(46) $G = f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
Für jedes $x \in \mathbb{N}$, $f(x) = 2$, wenn x eine gerade Zahl ist, und $f(x) = 1$ ansonsten.

Problem:
Es gibt keine vernünftige Wertebeschreibung hier.

(47) Scheitern der λ-Notation für (46):

a. $[\ \lambda\, x : x \in \mathbb{N}\ .\ 1\ ]$
b. $[\ \lambda\, x : x \in \mathbb{N}\ .\ 2\ ]$

Problem & Lösung

Problem:
Genau solche Funktionen brauchen wir aber.

(48) $[\![\textbf{raucht}]\!] := f : D \longrightarrow \{ 0, 1 \}$
Für alle $x \in D$, $f(x) = 1$ gdw. x raucht

(49) Schema bisher (= (44)):

a. $[\lambda\alpha : \phi \,.\, \gamma]$
b. die kleinste Funktion, die jedes α, so dass ϕ, auf γ abbildet.

(50) Schema neu:

a. $[\lambda\alpha : \phi \,.\, \gamma]$
b. die kleinste Funktion, die jedes α, so dass ϕ, auf 1 abbildet, falls γ, und auf 0 ansonsten.

Jetzt klappt es:

(51) $[\![\textbf{raucht}]\!] = [\lambda x : x \in D \,.\, x \text{ raucht}]$

(52) a. $[\![\textbf{raucht}]\!](\text{Anna}) = [\lambda x : x \in D \,.\, x \text{ raucht}]\,(\text{Anna}) = 1$, wenn Anna raucht,
$= 0$ ansonsten.

b. $[\![\textbf{raucht}]\!](\text{Anna}) = [\lambda x : x \in D \,.\, x \text{ raucht}]\,(\text{Anna}) = 1$ gdw. Anna raucht.

Neues Problem

Beobachtung:
Unter der neuen Interpretation des λ-Schemas ergibt sich für die ursprünglichen Anwendungen Unsinn.

(53) Nachfolgerfunktion:
[λx : x $\in \mathbb{N}$. x + 1]
"die Funktion, die jedes x in $\mathbb{N}$ auf 1 abbildet, falls x + 1, und auf 0 ansonsten"

Neue Lösung:
Wir nehmen das Schwein und den Speck.

(54) [$\lambda\alpha : \phi . \gamma$] ist zu lesen als (a) oder (b), was immer Sinn ergibt.

a. die kleinste Funktion, die jedes α, so dass ϕ, auf γ abbildet.
b. die kleinste Funktion, die jedes α, so dass ϕ, auf 1 abbildet, falls γ, und auf 0 ansonsten.

Transitive Verben

(55) Bisherige Notation:

$[\![\textbf{mag}]\!] = f : D \longrightarrow \{ g : g \text{ ist eine Funktion von D nach } \{ 0, 1 \}\}$

Für alle x, y $\in$ D, f(x)(y) = 1 gdw. gilt: y mag x.

(56) λ-Notation:

$[\![\textbf{mag}]\!] := [\ \lambda x \in D\ .\ [\ \lambda y : y \in D\ .\ y \text{ mag } x\ ]]$

Funktionen als Argumente

(57) Vorgriff: Generalisierte Quantoren:
[λf : f $\in$ $D_{<e,t>}$. es gibt ein x $\in$ D_e, so dass gilt: f(x) = 1]

(58) Mögliches Argument dieser Funktion:
[λy : y $\in$ D_e . y riecht]

(59) Berechnung:
[λf : f $\in$ $D_{<e,t>}$. es gibt ein x $\in$ D_e, so dass gilt: f(x) = 1] ([λy : y $\in$ D_e . y riecht]) = 1
gdw. gilt: es gibt ein x $\in$ D_e, so dass gilt: [λy : y $\in$ D_e . y riecht](x) = 1
gdw. gilt: es gibt ein x $\in$ D_e, so dass gilt: x riecht.

Vereinfachung der Notation

1. Äußere Klammern können manchmal weggelassen werden.
2. Bereichsbedingungen können verkürzt werden: $\lambda\alpha : \alpha \in \beta \;.\; \gamma \rightarrow \lambda\alpha \in \beta \;.\; \gamma$
3. Bereichsbedingungen können ganz weggelassen werden, wenn es sich um "x ∈ D" handelt.

(60) λ-Notationsvereinfachung:

a. $[\![\textbf{mag}]\!]$:= [λx : x ∈ D . [λy : y ∈ D . y mag x]]
b. $[\![\textbf{mag}]\!]$:= λx : x ∈ D . [λy : y ∈ D . y mag x]
c. $[\![\textbf{mag}]\!]$:= λx ∈ D . [λy ∈ D . y mag x]
d. $[\![\textbf{mag}]\!]$:= λx . [λy . y mag x]

(61) Vorsicht bei Ambiguität:

λx . [λy . y mag x] (Karl)

a. [λx . [λy . y mag x] (Karl)] = λx ∈ D . Karl mag x
b. [λx . [λy . y mag x]] (Karl) = λy ∈ D . y mag Karl

Mengenredeweise und Funktionsredeweise

Mengenrede	Funktionsrede
$\{ x \in \mathbb{N} : x \neq 0 \}$	$[\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, x \neq 0]$
$29 \in \{ x \in \mathbb{N} : x \neq 0 \}$ gdw. $29 \neq 0$	$[\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, x \neq 0]\ (29) = 1$ gdw. $29 \neq 0$
Massachusetts $\in$ { x $\in$ D : Kalifornien ist ein Staat an der Westküste } gdw. Kalifornien ein Staat an der Westküste ist	[λx $\in$ D . Kalifornien ist ein Staat an der Westküste](Masachusetts) = 1 gdw. Kalifornien ist ein Staat an der Westküste
{ x $\in$ D : Kalifornien ist ein Staat an der Westküste } = D gdw. Kalifornien ein Staat an der Westküste ist	[λx $\in$ D . Kalifornien ist ein Staat an der Westküste](x) = 1 für alle x $\in$ D, wenn Kalifornien ein Staat an der Westküste ist
{ x $\in$ D : Kalifornien ist ein Staat an der Westküste } = Ø gdw. Kalifornien kein Staat an der Westküste ist	[λx $\in$ D . Kalifornien ist ein Staat an der Westküste](x) = 0 für alle x $\in$ D, wenn Kalifornien kein Staat an der Westküste ist
$\{ x \in \mathbb{N} : x \neq 0 \} = \{ y \in \mathbb{N} : y \neq 0 \}$	$[\lambda x \in \mathbb{N} : x \neq 0] = [\lambda y \in \mathbb{N} : y \neq 0]$
$\{ x \in \mathbb{N} : x \in \{ x \in \mathbb{N} : x \neq 0 \}\} = \{ x \in \mathbb{N} \text{: } x \neq 0 \}$	$[\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, [\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, x \neq 0](x)] = [\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, x \neq 0]$
$\{ x \in \mathbb{N} : x \in \{ y \in \mathbb{N} : y \neq 0 \}\} = \{ x \in \mathbb{N} \text{: } x \neq 0 \}$	$[\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, [\lambda y \in \mathbb{N} \,.\, y \neq 0](x)] = [\lambda x \in \mathbb{N} \,.\, x \neq 0]$