

Naturwissenschaft für Querdenker

Jannik Jukiel

jj70zozi@studserv.uni-leipzig.de

22.07.2021

Der Trugschluss im mathematischen Gewand

EINE KURZER EINBLICK IN
DIE UNSICHERHEITEN DER
MATHEMATIK

Fallazie

Mathematische Trugschluss/Fehlschluss = Fallazien

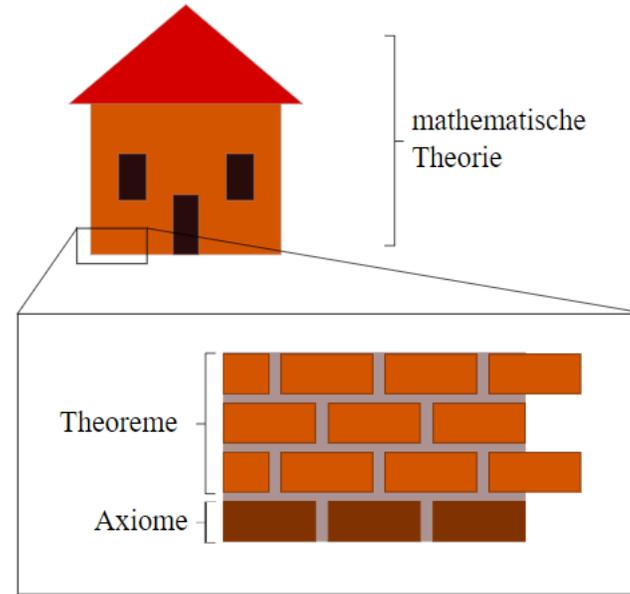
Scheinbeweise = Beweise in denen Fallazien auftreten

Entstehung:

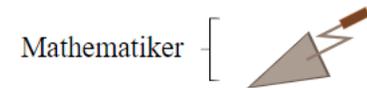
nichtbeachten mathematischer Regeln/ unzureichende
Befolgung derer Ansprüche

Historisch: kaum Überlieferungen, meist mündliche
Weitergabe von „Mathetricks“

Mathematischer Beweis



„Beweise sind also der Mörtel am Haus der Mathematik; sie halten alles zusammen.“
(deutsche Mathematiker-Vereinigung)



- Aus Axiomen \rightarrow Theoreme (mathematische Sätze) \rightarrow müssen bewiesen werden
- Axiome: grundlegend wahr
- Aus Axiomen/Prämissen muss ein Theorem über nur logische Schlussfolgerungen hergeleitet werden \rightarrow wenn A dann B und wenn B dann C...

Arithmetik

- Teilgebiet der Mathematik: Grundrechenarten

$$4 \text{ kg} = 4000 \text{ g}$$

$$2 \text{ kg} = 2000 \text{ g}$$

$$8 \text{ kg} = 2 \text{ kg} \times 4 \text{ kg}$$

$$8 \text{ kg} = 2000 \text{ g} \times 4000 \text{ g} = 8000000 \text{ g} = 8000 \text{ kg}?$$

→ Einheit muss mitquadriert werden

Algebra

- Teilgebiet der Mathematik: Rechnen mit Unbekannten in Gleichungen

$$1 = 2$$

$$a = b$$

| $\times a$

$$a^2 = ab$$

| $- b^2$

$$a^2 - b^2 = ab - b^2$$

| *Umformen*

$$(a + b) \times (a - b) = b \times (a - b)$$

| $\div (a - b)$

$$a + b = b$$

$$2b = b \rightarrow 2 = 1?$$

Analysis

- Teilgebiet der Mathematik: Funktionen
(Eigenschaften, Grenzwerte, Ableitungen, Integrale)

Summe aller natürlichen Zahlen $C = 1 + 2 + 3 + \dots = -1/12$

$$\begin{aligned} A &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ (Erwartungswert} = \frac{1}{2}\text{)} \\ &= 1 + (1 - 2) + (-2 + 3) + (3 - 4) + (-4 + 5) + (5 - 6) + \dots \\ &= 1 + 1 - 2 - 2 + 3 + 3 - 4 - 4 + \dots \\ &= 2 \cdot (1 - 2 + 3 - 4 + \dots) \\ &= 2 \cdot B \\ B &= 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C - B &= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots - (1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots) \\ &= (1 - 1) + (2 + 2) + (3 - 3) + (4 + 4) + (5 - 5) + (6 + 6) + \dots \\ &= 0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + \dots \\ &= 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots) \\ &= 4 \cdot C \end{aligned}$$

Also ist $3 \cdot C = -B$ oder mit $B = A/2 = 1/4$:

$C = -1/12$

Das kann ja hinten und vorne nicht stimmen! Aber warum?

$$A_n = (1 - 1) + \dots + (1 - 1) = 0$$

$$B_n = (1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (n - 1 - n) = -\frac{n}{2}$$

$$2B_n = A_n - n \rightarrow 2B_n = A_n \text{ ist schonmal in erster Ordnung von } n \text{ falsch d. Rest } -n$$

$$C_n - B_n = 1 + 2 + \dots + n - (1 - 2 \pm \dots - n) = 4 \times \left(1 + 2 + \dots + \frac{n}{2}\right) = 4C_{n/2}$$

$$\frac{C_n}{C_{n/2}} = \frac{\frac{n}{2}(n+1)}{\frac{n}{4}(n+1)} = 4 \frac{n+1}{n+2}, \text{ mit wachsendem } n \text{ der vier und weil } C_n \text{ mit dem Quadrat von } n \text{ zunimmt ist die Formel } C_n = -$$

$B_n/3$ in zweiter Ordnung falsch

Logik

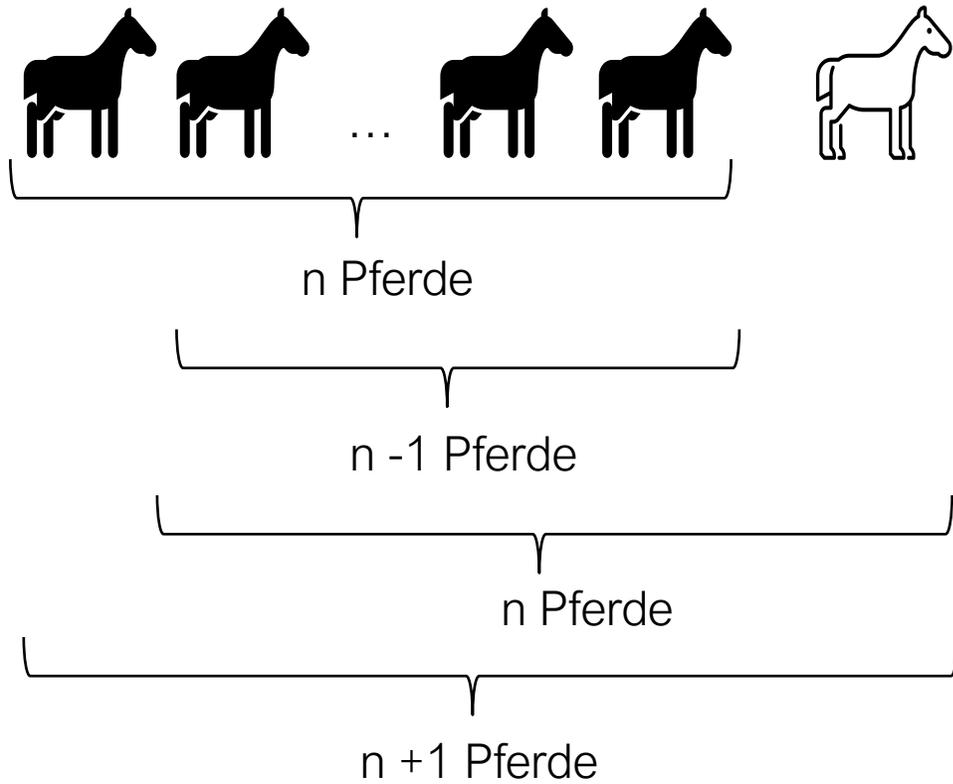
- Teilgebiet der Mathematik: Metamathematik (Beweise, formale Systeme)

Pferde-Paradox „Alle Pferde besitzen die gleiche Farbe“

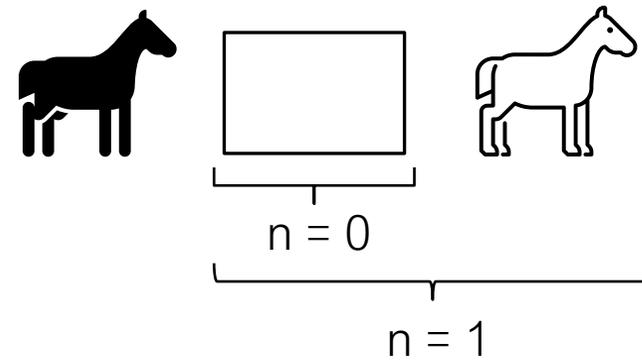
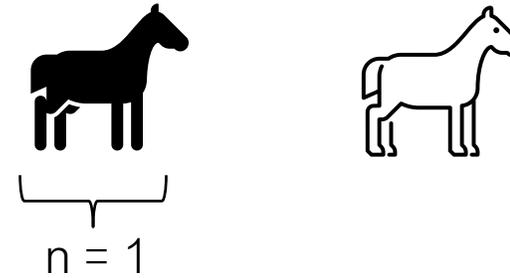
- Induktionsanfang (Verankerung): $n = 1$ Pferde in einer Herde \rightarrow alle Pferde gleiche Farbe
- Induktionsvoraussetzung: n Pferde besitzen gleiche Farbe
- Induktionsbehauptung: $n + 1$ Pferde besitzen gleiche Farbe
- Induktionsschritt: 1 Pferd aus Herde n entfernen $\rightarrow n - 1$ (gleicher Farbe)
- Unbekanntes Pferd wird in $n - 1$ integriert $\rightarrow n \rightarrow$ alle Pferde n haben gleiche Farbe
- Zuvor entferntes Pferd wieder dazu \rightarrow Herde $n + 1$ hat gleiche Farbe
- **Problem: Induktionsverankerung nicht für $n = 2$ definiert \rightarrow gilt nur für $n \geq 2$**

https://www.youtube.com/watch?v=uq01Kp3RzcA&ab_channel=MaxK%C3%BCIshammer

Logik



$$n + 1 = 2$$

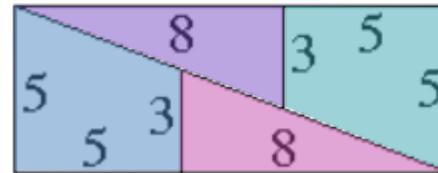
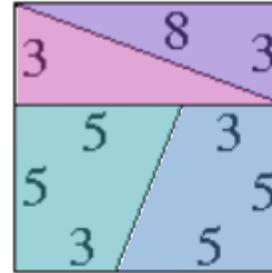


Geometrie

- Teilgebiet der Mathematik: Formen, Flächen, Geraden
- Quadrat: $A = 8 \cdot 8 = 64$
- Rechteck $A = 5 \cdot 13 = 65$

Wie kann das denn sein?

- Skizze lügt \rightarrow Diagonalen = Scheingeraden
- Beweis per Strahlensatz zeigt \rightarrow kann kein Rechteck bilden



Hilbertprogramm vs. Gödelscher Unvollständigkeitssatz

HILBERT

Es gibt eine Widerspruchsfreiheit der formal ableitbaren Sätze

Jeder mathematische Satz muss beweisbar sein, ob er wahr oder falsch ist

Bedienung von unmittelbar einleuchtenden Axiomen → vollkommen, widerspruchsfrei

GÖDEL

erste Unvollständigkeitssatz:

In allen hinreichend starken widerspruchsfreien Systemen gibt es unbeweisbare Aussagen

zweite Unvollständigkeitssatz:

hinreichend starke widerspruchsfreie Systeme können ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen

Relevanz

Millenium-Probleme

- 7 ungelöste Probleme der Mathematik
- 1 gelöst (Poincaré-Vermutung) von Grigori Jakowlewitsch Perelman (2002)

Hilberts Probleme:

- Liste von 23 Problemen der Mathematik
- 3 ungelöst, 7 halbgelöst, 13 weitgehend gelöst

General Relativity vs. Quantum Theory

- Relativity funktioniert nicht im kleinen
- Quantum funktioniert nicht im großen
- Beides bewiesen/nachgewiesen

Danke für eure Aufmerksamkeit

Jannik Jukiel

Universität Leipzig

jj70zoz@studserv.uni-leipzig.de

Literatur

<https://www.duden.de/rechtschreibung/Fallazien>

[https://de.wikipedia.org/wiki/Trugschluss_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Trugschluss_(Mathematik))

- Edwin A. Maxwell: Fallacies in mathematics. Cambridge University Press, 1959
- Walter Lietzmann: Trugschlüsse. B.G. Teubner, 1923
- Holger Dambeck: Mathematik bizarr. Spiegel, abgerufen am 2. Juli 2017
- Thomas Sauer: Gegenbeispiele, Trugschlüsse und Mathematik auf dem Computer. (PDF) 2001, abgerufen am 2. Juli 2017
- Klaus Fritzsche: Tutorium Mathematik für Einsteiger. Springer-Verlag, 2016
- Philip Spencer: Classic Fallacies. University of Toronto, abgerufen am 2. Juli 2017
- Hermann Schubert: Mathematische Mußestunden: Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Walter de Gruyter, 1967

<https://de.wikipedia.org/wiki/Pferde-Paradox>

<https://www.mathematik.de/algebra/91-erste-hilfe/verzeichnis/beweise-und-beweismethoden/709-was-ist-ein-beweis>