

Gefangenendilemma

Naturwissenschaft für Querdenker 2021

Ein Vortrag von: Josephine Selig, Erik Schulze, Lorenz Heinemann





Mehr Straßen =
weniger Stau?

Leider nicht
ganz.

Problem

Der Innenstadtring ist seit 10 Jahren überfüllt und ein Engpass für viele Autos

Lösung?

Es wird über den Bau neuer und breiterer Verbindungsstraßen nachgedacht (Mittlerer Ring)



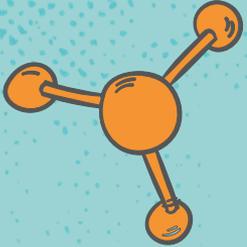
Problem

Der Innenstadtring ist seit 10 Jahren überfüllt und ein Engpass für viele Autos

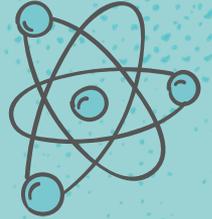
Lösung?

Es wird über den Bau neuer und breiterer Verbindungsstraßen nachgedacht (Mittlerer Ring)

Ist das eine gute Idee?
Im ersten Moment scheint es eventuell helfen zu können...



Gliederung



01

Theorie

Problem
Nash-Gleichgewicht
Spielweisen
Strategien

02

Braess-
Paradoxon

Erklärung
Analogien
Beispiel

03

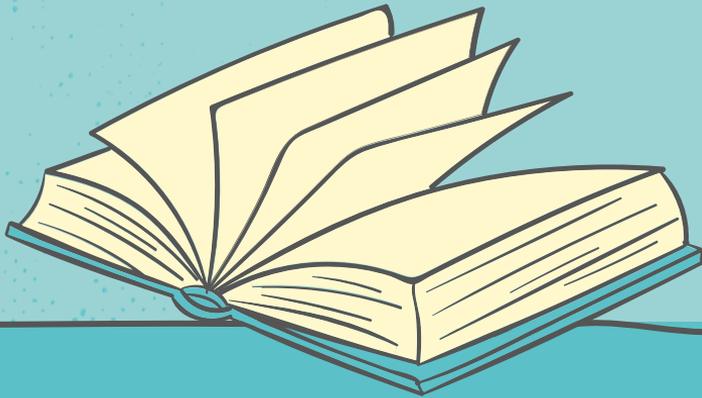
Beispiele und
Anwendung

Wirtschaft
Politik

01



Theorie



Was ist eigentlich das Gefangenendilemma?

Warum ist es ein Dilemma?

Was ist das Gefangendilemma?

Mathematische Spieltheorie

Problem:

Zwei Bankräuber werden gefasst, es kann Ihnen aber nur eine kleine Straftat nachgewiesen werden. Die Polizei verhört beide getrennt, dabei bietet die Staatsanwaltschaft eine Kronzeugenregelung an.



Spieler 1 / 2	schweigen	gestehen
schweigen	-3, -3	-10, 0
gestehen	0, -10	-8, -8

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

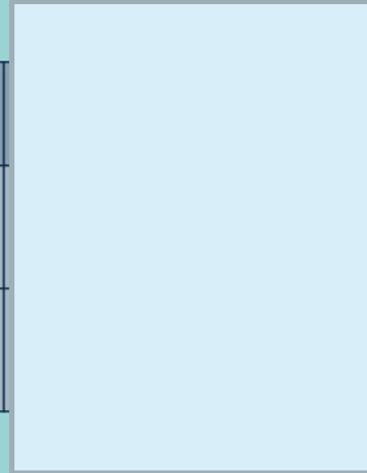
- = Strategiepaar, bei dem kein Spieler Anreiz für einseitiges Abweichen besitzt. Es sind gegenseitig die besten Antworten.
- stabil



Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen
schweigen	-3, -3
gestehen	0, -10



Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen
schweigen	-3, -3
gestehen	0, -10



Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2		gestehen
schweigen		-10, 0
gestehen		-8, -8

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2		gestehen
schweigen		-10, 0
gestehen		-8, -8

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen	gestehen
schweigen	-3, -3	-10, 0
gestehen		

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen	gestehen
schweigen	-3, -3	-10, 0
gestehen		

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen	gestehen
schweigen		
gestehen	0, -10	-8, -8

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen	gestehen
schweigen	-3, -3	-10, 0
gestehen	0, -10	-8, -8

Nash-Gleichgewicht

auch Nash-Equilibrium

Spieler 1 / 2	schweigen	gestehen
schweigen	-3, -3	-10, 0
gestehen	0, -10	-8, -8

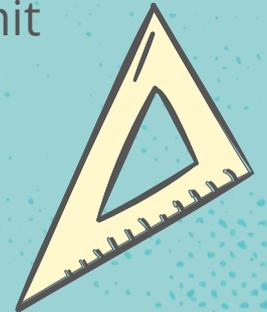


Nash-
Gleichgewicht

Keinem Spieler ist es möglich, sich durch
Wahl einer anderen Strategie zu
verbessern

Strategiearten

- *dominante Strategie*: Strategie, die unabhängig von anderen Akteuren, am vorteilhaftesten ist
- *reine Strategie*: bestimmte Spielerentscheidung
- *gemischte Strategie*: eine zufällige Entscheidung wird mit bestimmter Wahrscheinlichkeit gefällt



Diskussion



vertrauen

???



Schuld

???

Spielweisen

- *einmaliges Spiel:*
 - in Experimenten kooperierten viele auch bei einmaligem Spiel
- *mehrmaliges Spiel:*
 - Möglichkeit der Vergeltung
 - ist beiden Spielern die Anzahl der Runden bekannt, so ist ständiger Verrat die beste Strategie/Nash-Gleichgewicht (*Backwards Induction*)
- *unendliches Spiel:*
 - unbekannte Anzahl an Runden
 - Belohnung von Kooperation oder Vergeltung -> Tit for tat (kalkulatives Vertrauen)



Spielweisen

- mehr als 2 Akteure:
 - andere Auszahlungen, $A_{\text{Cooperation}} = 2x$, $A_{\text{Defektion}} = 3x+3$ mit x = Anzahl kooperierender Spieler
 - A_D immer noch dominante Strategie, da höhere Auszahlung 

	0	1	2	3	...	98	99
C	2	4	6	8	...	198	200
D	3	6	9	12	...	297	300

Strategien

- **Tit for Tat:** Kooperation in Runde 1, danach letzten Zug des Spielpartners
- **Mistrust:** Verrat in Runde 1, danach Kopie des letzten Spielzug des Partners
- **Spite:** Kooperation bis zum Vertrauensbruch, danach nur Verrat
- **Pavlov:** Kooperation in Runde 1, verrät, wenn der vorherige Zug anders als der eigene war





Strategien

- **gradual:** Kooperiert grundsätzlich, bestraft jeden Verrat aber unversöhnlicher
- **Master and Servant/Southampton-Strategie:** in den ersten 5 bis 10 Runden codiertes Verhalten zum Erkennen ob Gegenstrategie auch Master & Servant, falls ja so wird einer "Master" und der andere "Servant", sonst kompletter Verrat zum Schädigen des Mitspielers
- **Tit for Two Tats:** wie Tit for Tat nur bei Verrat wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit verraten oder kooperiert (Zyklusunterbrechungen)

Turniere



- Computerturnier von Axelrod
 - Computer mit verschiedenen Strategien treten gegeneinander an
- Evolutionsdynamische Turniere
 - Auch Axelrod
 - Mehrere Runden = mehrere Generationen
 - Durchgang: jeder gegen jeden
 - Erfolgreichere Strategien ersetzen die erfolgloseren Strategien im nächsten Durchgang

Turniere



- Computerturnier von Axelrod
 - Computer mit verschiedenen Strategien treten gegeneinander an
- Evolutionsdynamische Turniere
 - Auch Axelrod
 - Mehrere Runden = mehrere Generationen
 - Durchgang: jeder gegen jeden
 - Erfolgreichere Strategien ersetzen die erfolgloseren Strategien im nächsten Durchgang

Tit-for-Tat

Turniere



- Computerturnier von Axelrod
 - Computer mit verschiedenen Strategien treten gegeneinander an
- Evolutionsdynamische Turniere
 - Auch Axelrod
 - Mehrere Runden = mehrere Generationen
 - Durchgang: jeder gegen jeden
 - Erfolgreichere Strategien ersetzen die erfolgloseren Strategien im nächsten Durchgang

Tit-for-Tat

Tit-for-Tat, Master and Servant

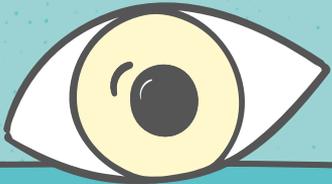
02



Braess-Paradoxon

Was ist eigentlich das Braess-Paradoxon?

Was hat es mit dem Straßenverkehr am Leipziger Ring
zu tun?



Braess-Paradoxon
= nie wieder Stau?

...nicht ganz.



II

Das Braess-Paradoxon der Spieltheorie veranschaulicht, dass eine zusätzliche Handlungsoption bei einer rationalen Entscheidung zu einer Verschlechterung der Situation für alle führen kann.



<https://mathematikalpha.de/braess-paradoxon>

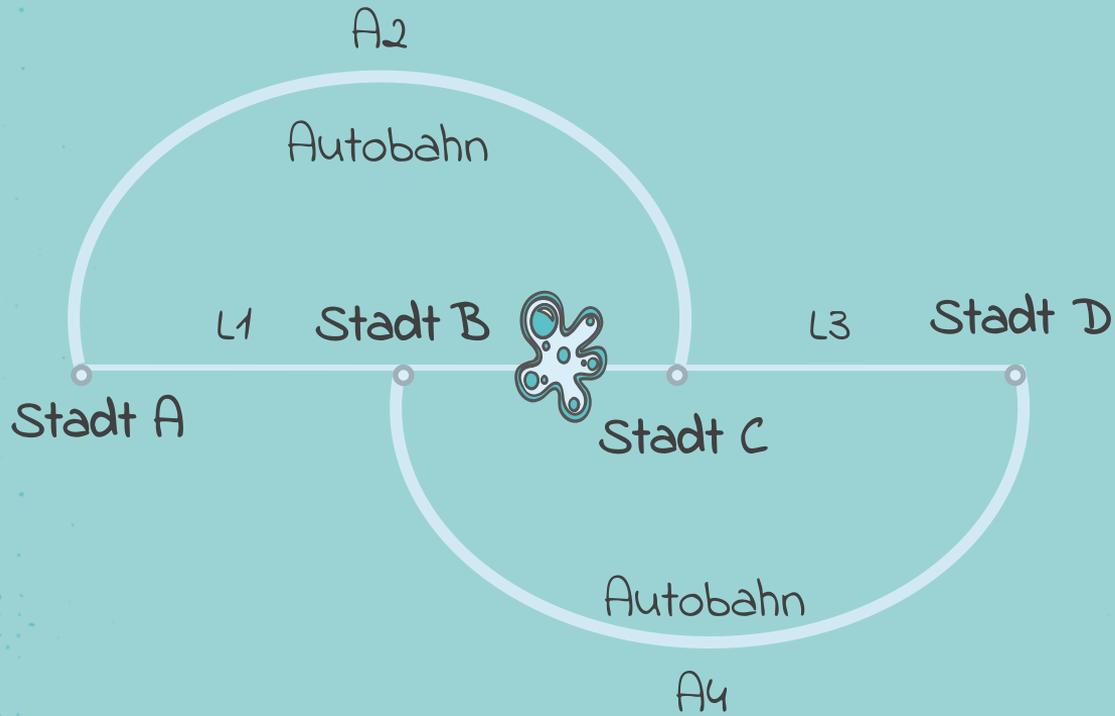


Das Paradoxe

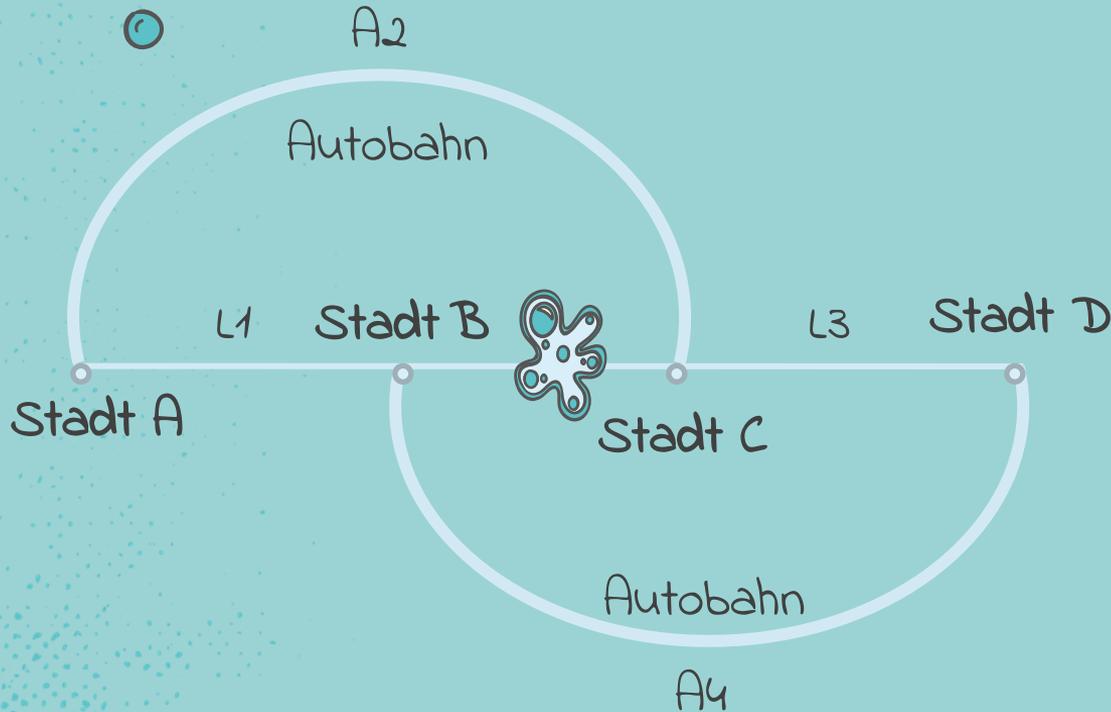
Bei der Erweiterung eines
Straßennetzes um eine zusätzliche
Straße wird die durchschnittliche
Fahrzeit der Verkehrsteilnehmer länger



Verkehrsproblem - Erklärung



Verkehrsproblem - Erklärung



Fahrzeiten

Autobahnen:

$$t(A2) = t(A4) = 50 + j \text{ min}$$

Landstraßen:

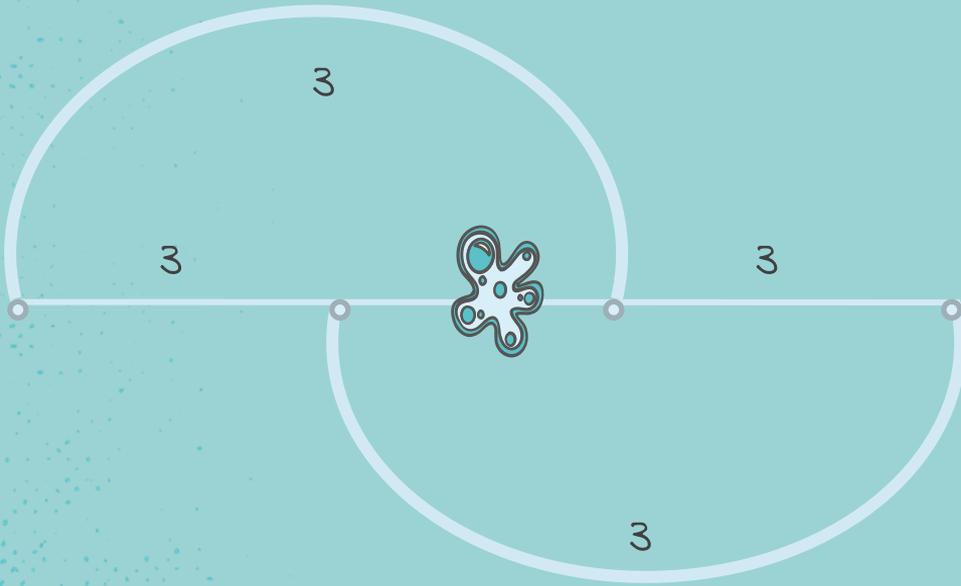
$$t(L1) = t(L3) = 0 + 10j \text{ min}$$

j = Verkehrsfluss
(in 1000 Fahrzeuge)
[bei 3000 Fahrzeuge
also $j = 3$]

Gesamtanzahl

Fahrzeuge = 6000

Verkehrsproblem - Erklärung



Fahrzeiten

Autobahnen:

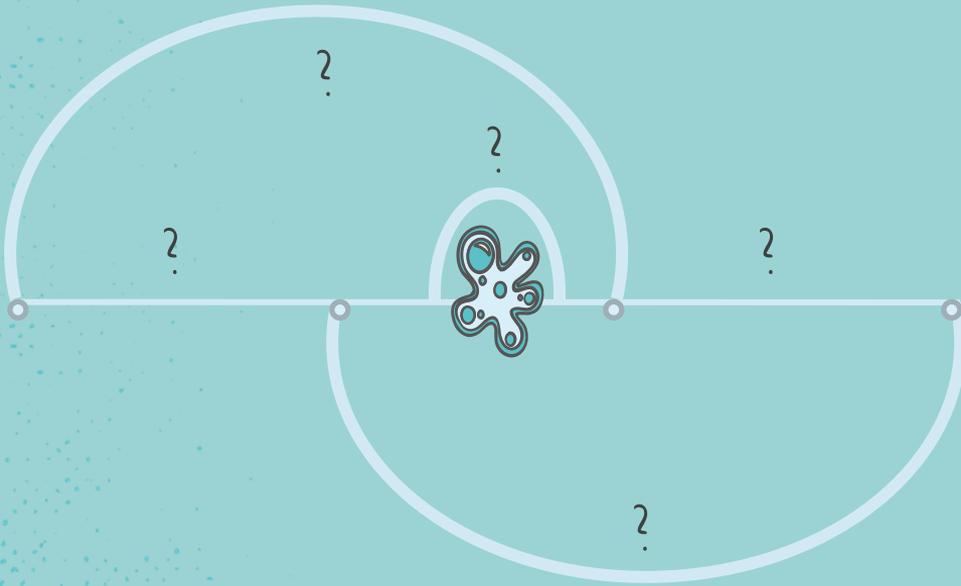
$$t(A2) = t(A4) = 50 + 3 \text{ min}$$

Landstraßen:

$$t(L1) = t(L3) = 0 + 10 \cdot 3 \text{ min}$$

Gesamtstrecke = 83 min

Verkehrsproblem - Erklärung



Fahrzeiten

Autobahnen:

$$t(A2) = t(A4) = 50 + 3 \text{ min}$$

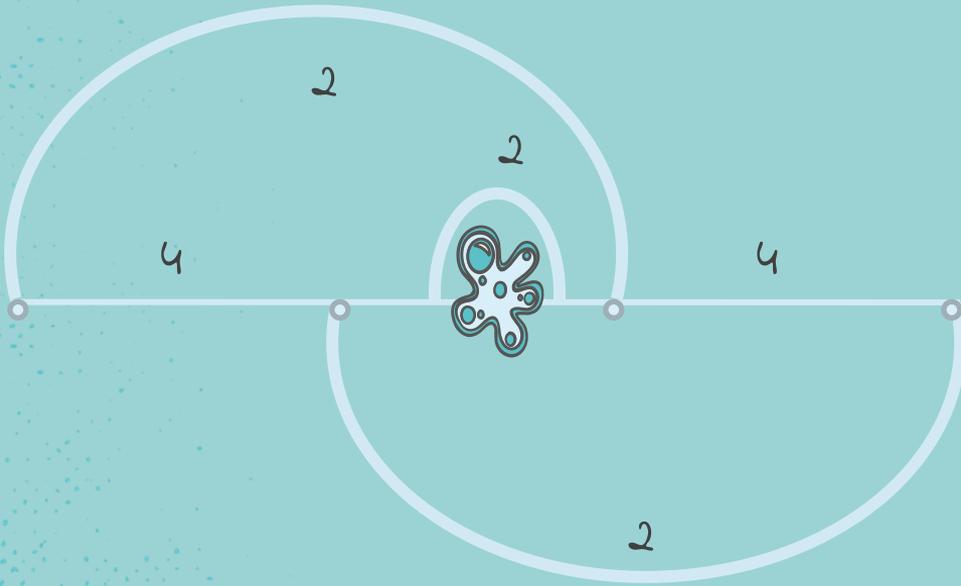
Landstraßen:

$$t(L1) = t(L3) = 0 + 10 \cdot 3 \text{ min}$$

Brücke:

$$t(BC) = 10 + j \text{ min}$$

Verkehrsproblem - Erklärung



Fahrzeiten

Autobahnen:

$$t(A2) = t(A4) = 50 + 3 \text{ min}$$

Landstraßen:

$$t(L1) = t(L3) = 0 + 10 \cdot 3 \text{ min}$$

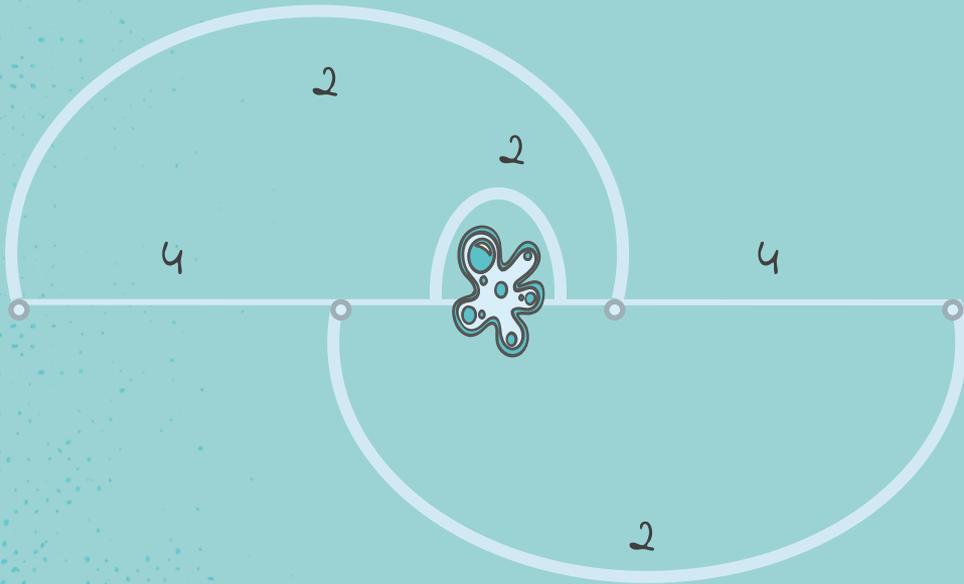
Brücke:

$$t(BC) = 10 + j \text{ min}$$

$$t(ACD) = t(ABD) = 50 + 2 + 10 \times 4 = 92 \text{ min}$$

$$t(ABCD) = 2 \times 10 \times 4 + 10 + 2 = 92 \text{ min}$$

Verkehrsproblem - Erklärung



Fahrzeiten

Autobahnen:

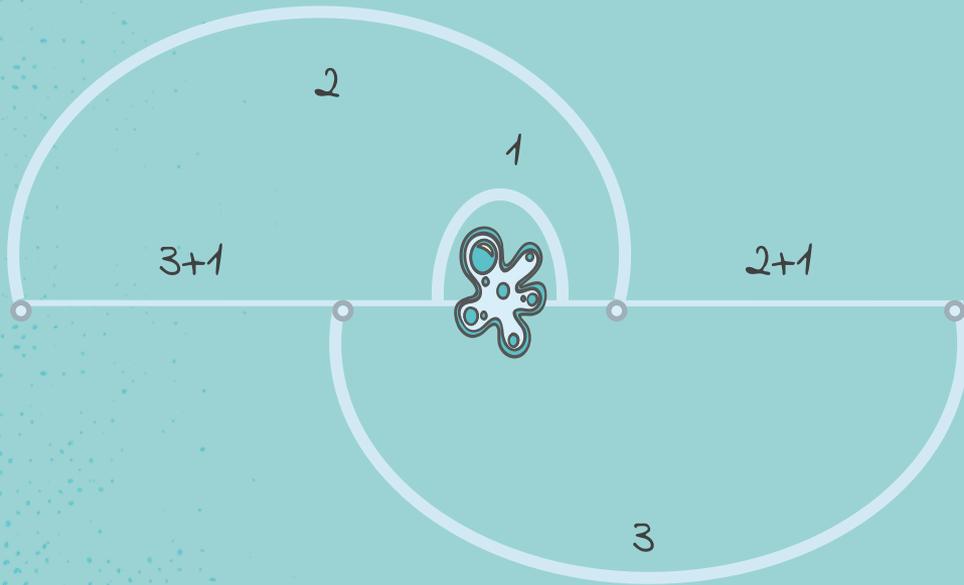
$$t(A2) = t(A4) = 50 + 3\text{min}$$

**Wie kommen die Fahrer
aus dem Dilemma raus?**

$$t(ACD) = t(ABD) = \\ 50 + 2 + 10 \times 4 = 92 \text{ min}$$

$$t(ABCD) = \\ 2 \times 10 \times 4 + 10 + 2 = 92 \text{ min}$$

Verkehrsproblem - Erklärung



Nur durch das Ignorieren der zusätzlichen Verbindungsbrücke kann die Fahrzeit wieder gesenkt werden!

Auch das abwechselnde Benutzen der Brücke bringt nichts, da der Mittelwert noch immer über dem Ausgangswert (ohne Brücke) liegen würde.



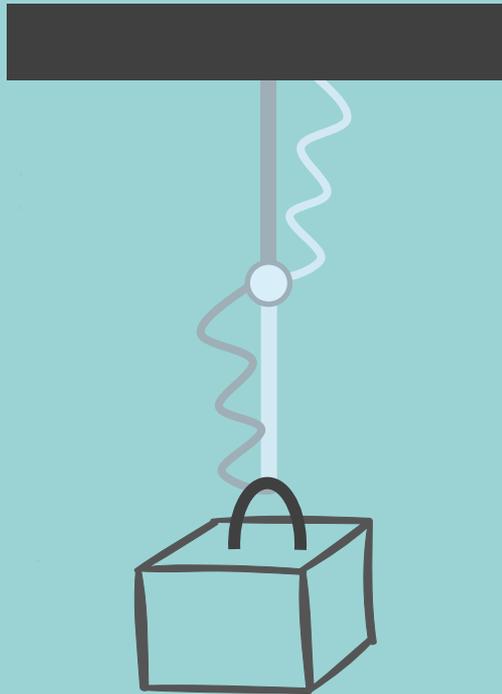
Wo ist der Zusammenhang
zum Gefangenendilemma?



Braess-Paradoxon = Gefangenendilemma?

- Situation nach dem Brückenbau = Mehr-Personen-Gefangenendilemma
 - Man kann vermuten, dass durch eine andere Routenwahl von einigen Fahrern eine bessere Situation entstünde
 - Dem ist nicht so
 - Entscheidet sich ein Fahrer am nächsten Tag anders zu fahren, so verlängert er die Fahrzeit für sich und die anderen Teilnehmer auf seiner neuen Strecke
- Nash-Gleichgewicht

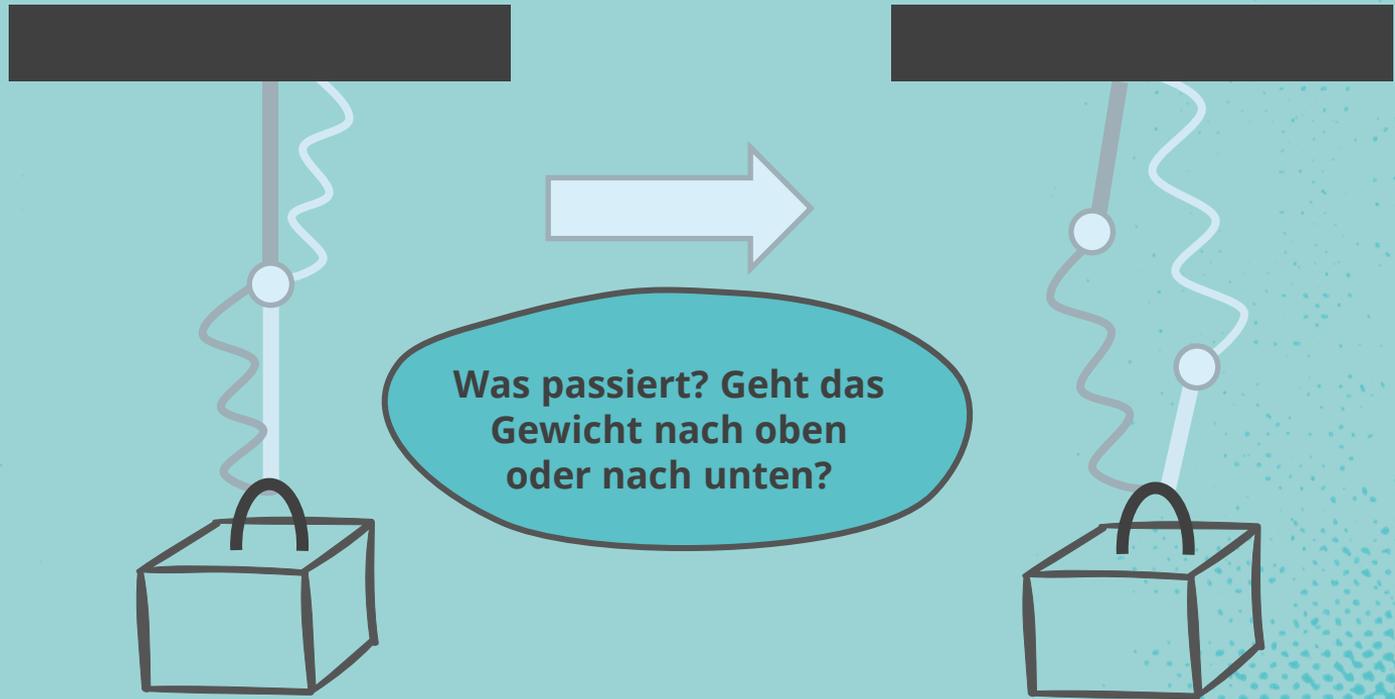
Mechanische Analogie



Ein Gewicht hängt an mehreren Federn

- Federstäbe (sehr stark)
- Springfedern (sehr schwach)
- Federstäbe miteinander verbunden

Mechanische Analogie



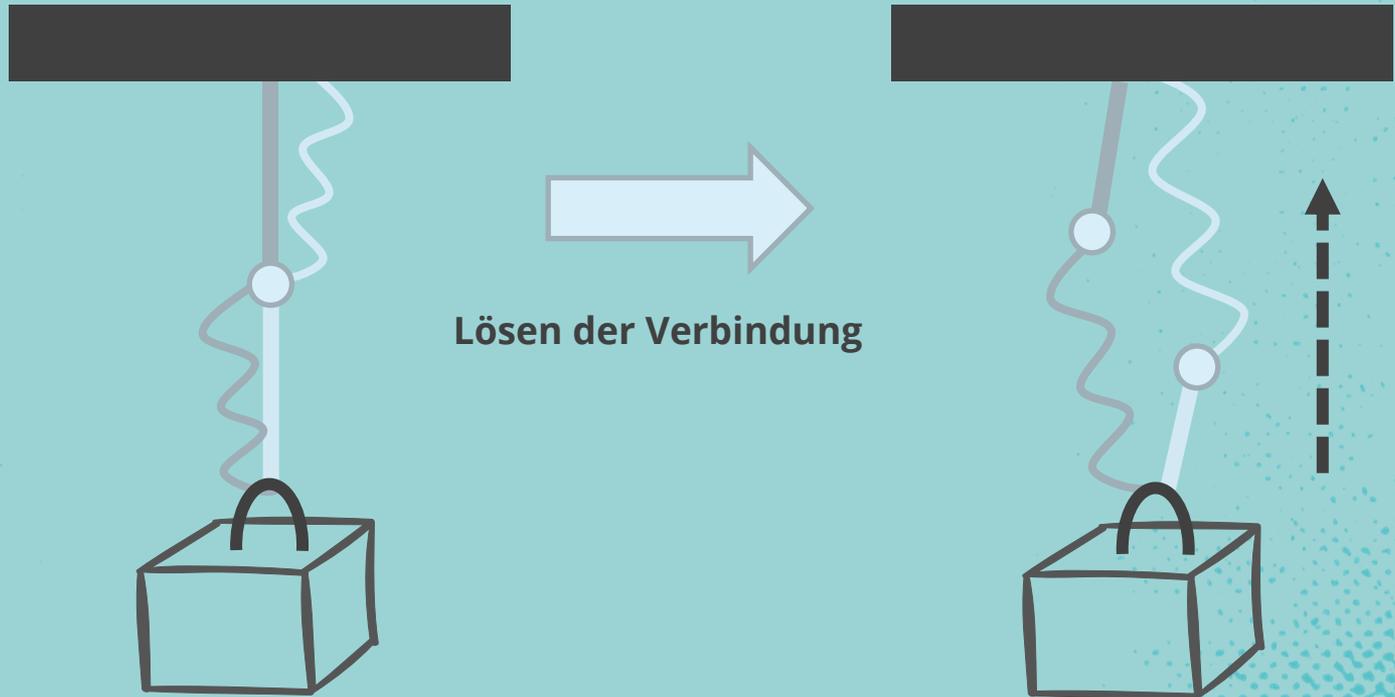
Was passiert? Geht das Gewicht nach oben oder nach unten?

Mechanische Analogie

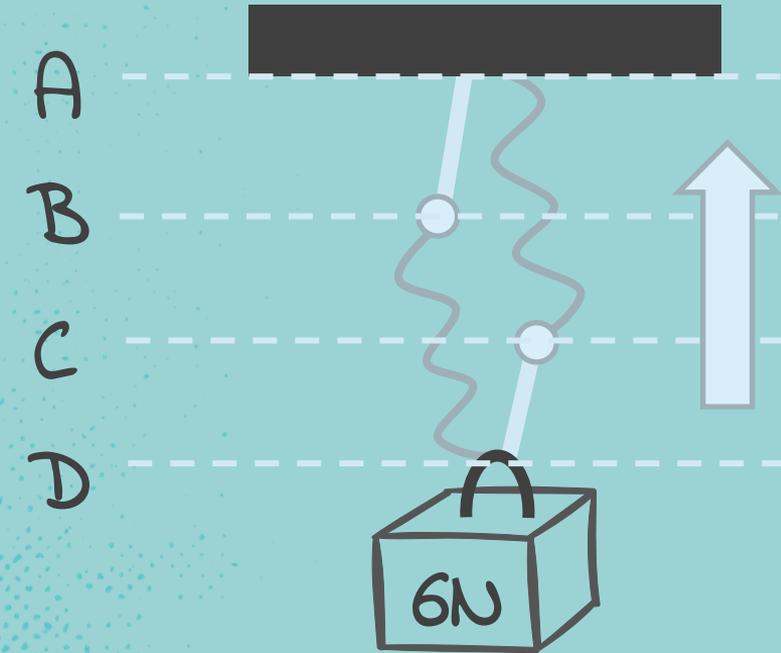
The peripheral strings connect the springs in parallel, but are slack



Mechanische Analogie



Mechanische Analogie



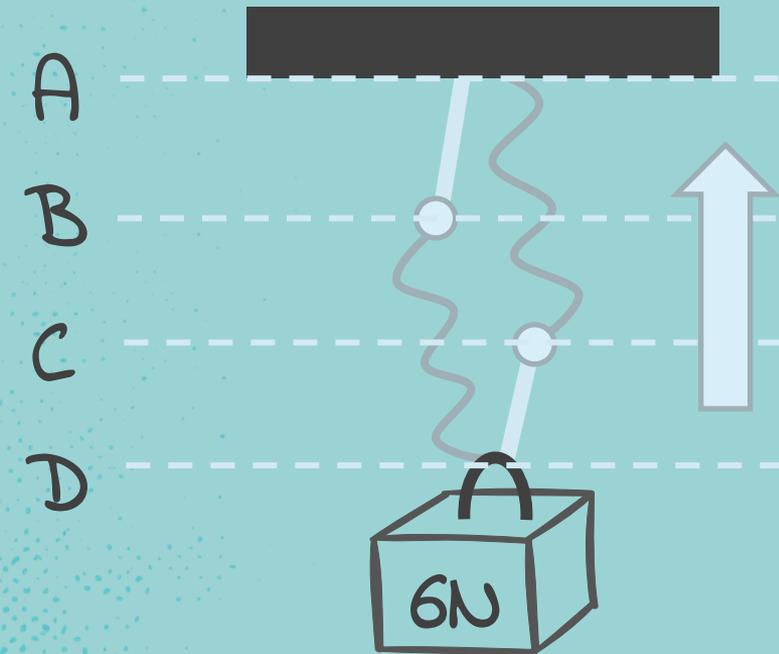
Physikalische Beschreibung der Federn

- Stark: $l(F) = 10\text{cm} + 8\text{cm/N} * F$
- Schwach: $l(F) = 50\text{cm} + 1\text{cm/N} * F$

Ist es wirklich ein Paradoxon?

- Gewichtskraft teilt sich gleichmäßig auf alle Federn auf
- *Beispiel:* Für jede Feder gilt $F = 3\text{N}$

Mechanische Analogie



Physikalische Beschreibung der Federn

- Stark: $l(F) = 10\text{cm} + 8\text{cm/N} * F$
- Schwach: $l(F) = 50\text{cm} + 1\text{cm/N} * F$

Ist es wirklich ein Paradoxon?

- *Beispiel:* Für jede Feder gilt $F = 3\text{N}$

$$l_{AB}(3\text{N}) = 34\text{cm}$$

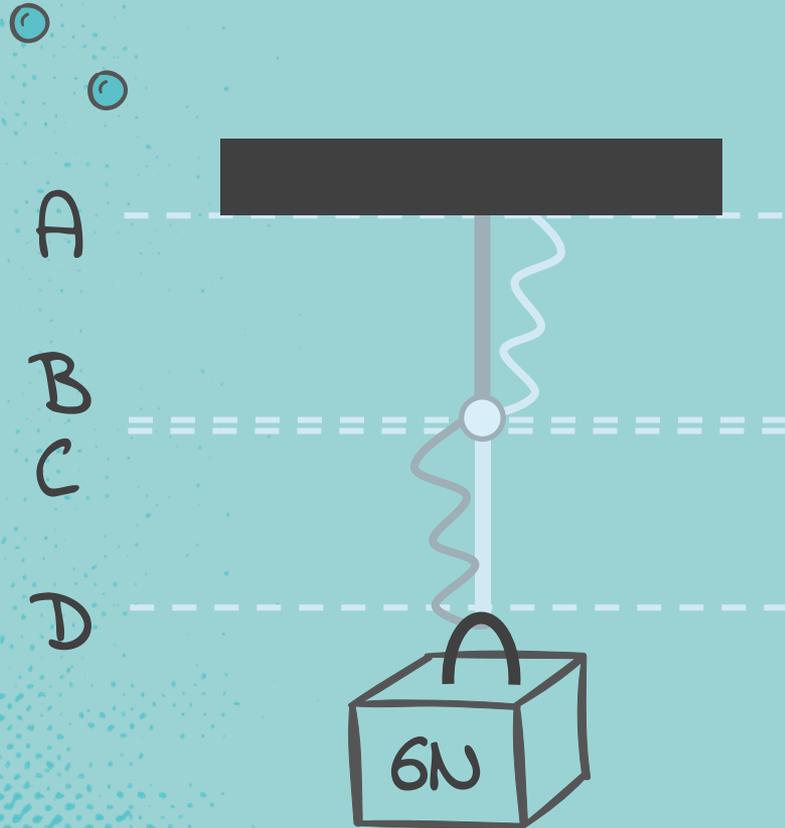
$$l_{BD}(3\text{N}) = 53\text{cm}$$

$$l_{AC}(3\text{N}) = 53\text{cm}$$

$$l_{CD}(3\text{N}) = 34\text{cm}$$

→ Gesamt: **87cm**

Mechanische Analogie



Physikalische Beschreibung der Federn

- Stark: $l(F) = 10\text{cm} + 8\text{cm/N} * F$
- Schwach: $l(F) = 50\text{cm} + 1\text{cm/N} * F$

Ist es wirklich ein Paradoxon?

- *Beispiel:* Kraft liegt nur auf den starken Federn (6N). Schwache Federn nehmen keine Last ab

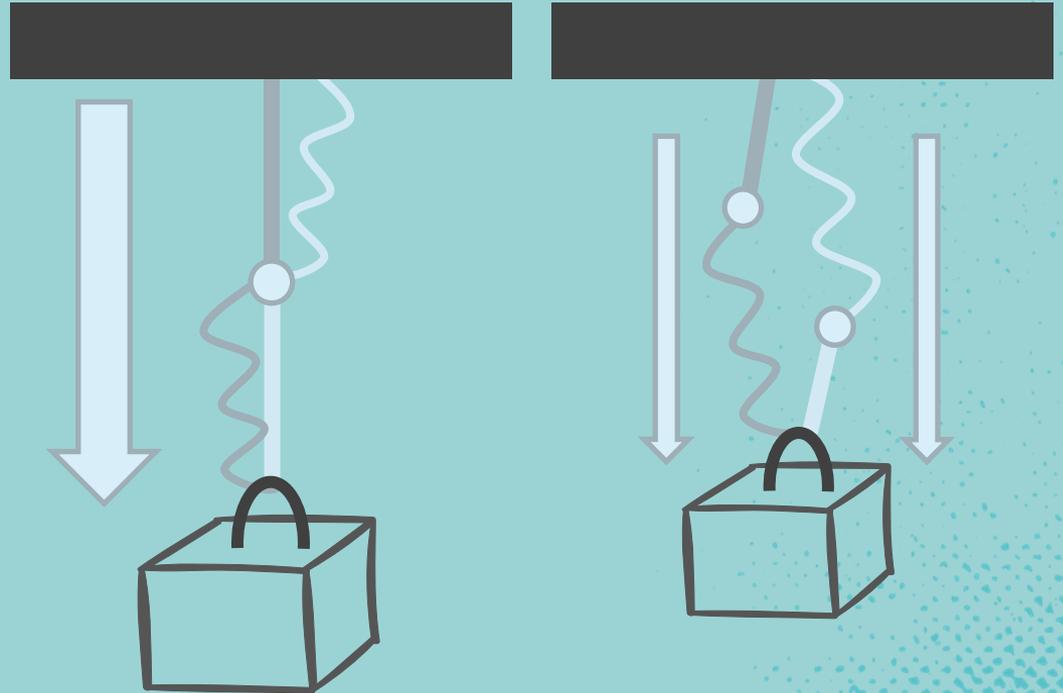
$$l_{AB}(6\text{N}) = 58\text{cm}$$

$$l_{CD}(6\text{N}) = 58\text{cm}$$

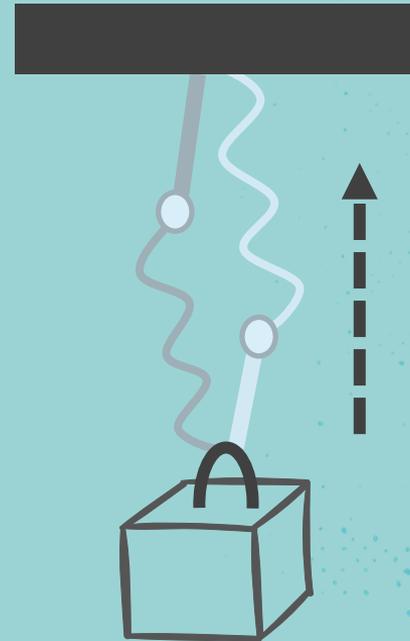
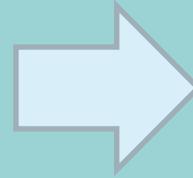
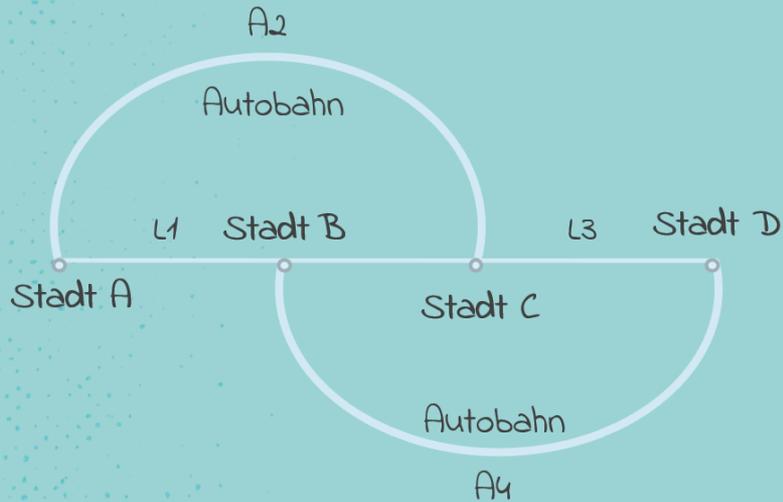
→ Gesamt: **116cm**

Mechanische Analogie

- **Links:** Gesamtes Gewicht lastet auf beiden Federn
- **Rechts:** Gewichtskraft teilt sich gleichmäßig auf beide Pfade auf und die Federn müssen nur die Hälfte der Last tragen

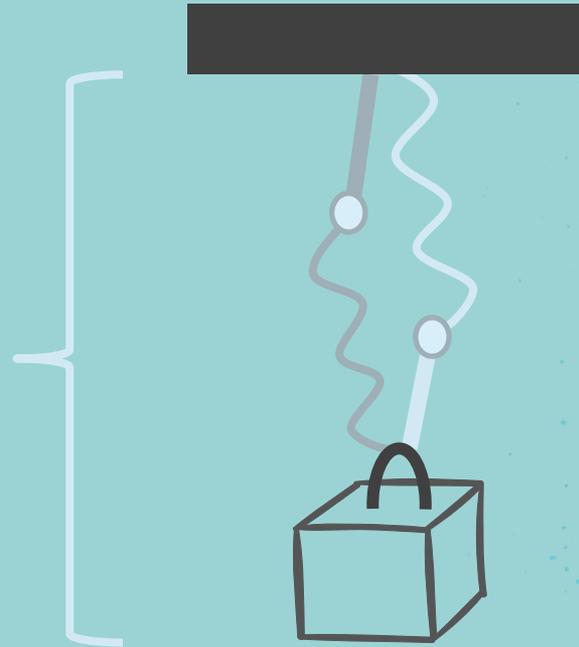


Zusammenhang Verkehrsproblem und Mechanische Federn



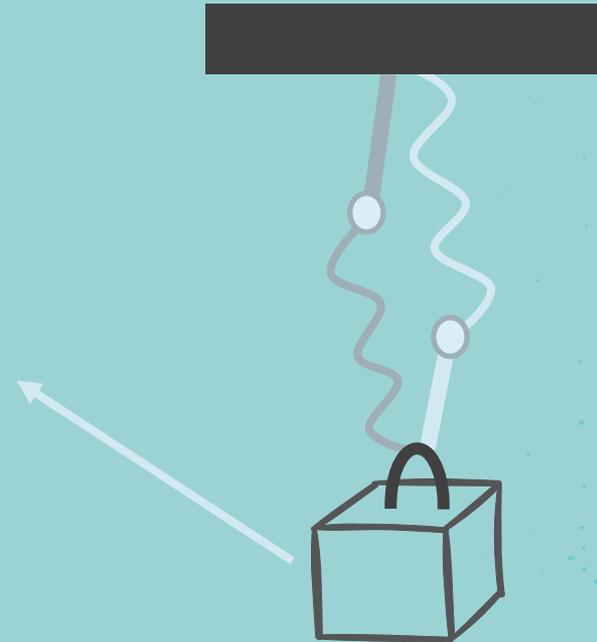
Zusammenhang Verkehrsproblem und Mechanische Federn

- **Höhe der Federn:** Kann als „Fahrzeit“ im Verkehrsproblem angesehen werden.
- Wir versuchen dies zu minimieren



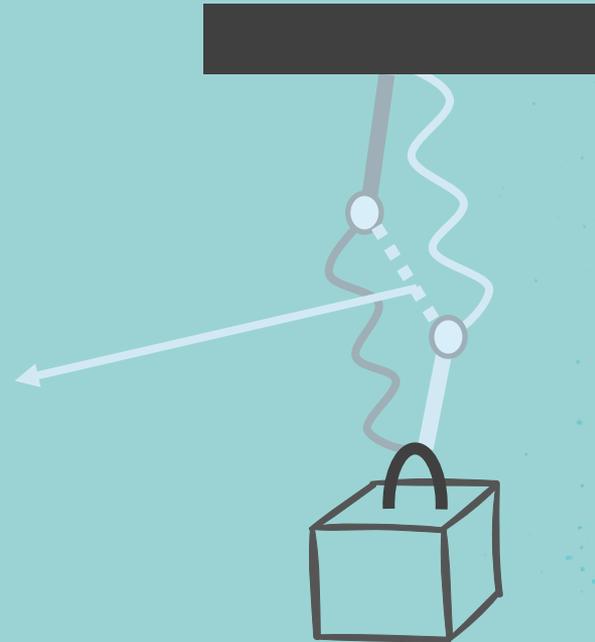
Zusammenhang Verkehrsproblem und Mechanische Federn

- **Gewicht:** Anzahl an Fahrzeugen im gesamten Straßennetz
- Eine Erhöhung führt zur insgesamt Verlängerung der Federn/Fahrzeit



Zusammenhang Verkehrsproblem und Mechanische Federn

- **Verbindung der beiden Federn:** Brücke, die den Fahrern Fahrzeit ersparen soll (Problem: Alle nutzen dann die selbe Route → Alle Kraft läuft über die selben zwei Federn)



II

Das Braess-Paradoxon der Spieltheorie veranschaulicht, dass eine zusätzliche Handlungsoption bei einer rationalen Entscheidung zu einer Verschlechterung der Situation für alle führen kann.



<https://mathematikalpha.de/braess-paradoxon>

03



Beispiele

Wo kommt es im Alltag vor?

Kommt es überhaupt vor?



Beispiele - Braess Paradoxon

Ausbau des Leipziger Rings

→ Würde wahrscheinlich Verkehr nicht verbessern



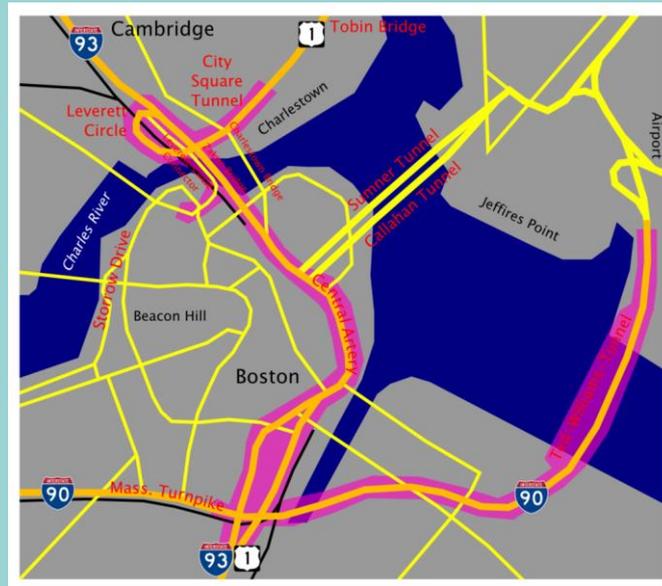
Beispiele - Braess Paradoxon

Umwandlung des Times Square in New York



Beispiele - Braess Paradoxon

Big Dig in Boston



Beispiele - Braess Paradoxon

Öffentliche Verkehrsmittel in London



Beispiele - Braess Paradoxon

Qual der Wahl beim Einkauf

The Google logo, consisting of the word "Google" in its characteristic multi-colored font (blue, red, yellow, green, red).The eBay logo, consisting of the word "eBay" in its characteristic multi-colored font (red, blue, yellow, green).The Amazon logo, consisting of the word "amazon" in a black, lowercase, sans-serif font with a curved orange arrow underneath it.

Beispiele - Gefangenendilemma

- Krieg / Frieden
- Beide Staaten haben die Möglichkeit, sich friedlich zu verhalten, oder Krieg zu erklären

DE / RU	Frieden	Krieg
Frieden	0, 0	-10, 0
Krieg	0, -10	-5, -5



Beispiele - Gefangenendilemma

- Kalter Krieg
- Beide Staaten können entweder Auf- oder Abrüsten

USA / RU	Abrüsten	Aufrüsten
Abrüsten	2, 2	0, 3
Aufrüsten	3, 0	1, 1

Beispiele - Gefangenendilemma

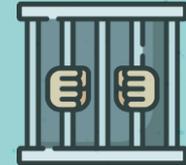
- Ölförderung / Produktion
- Ölfördernde Staaten / Firmen können entweder Viel oder Wenig Öl fördern / produzieren
- Je weniger gefördert / produziert wird, desto höher der Preis

Staat 1 / Staat 2	Wenig	Viel
Wenig	7, 7	1, 10
Viel	10, 1	3, 3

Beispiele - Gefangenendilemma

- Omertà in der Maffia
- Grundbeispiel des Gefangenendilemmas
- Wenn einzelner Informant wird erhält er Schutz, wenn mehrere Informanten werden, volle Strafe

P 1 / P 2	Schweigen	Reden
Schweigen	0, 0	-7, 0
Reden	0, -7	-3,-3



Beispiele - Nash-Gleichgewicht

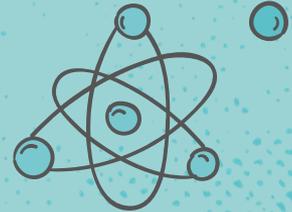
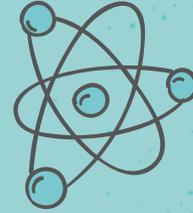
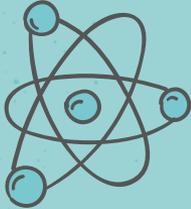
- Erinnern des Lehrers
- Wenn einzelner erinnert, wird für alle kontrolliert

SmH / SoH	Schweigen	Erinnern
Schweigen	0, 0	0, -3
Erinnern	0, -3	0, -3

Außeneinflüsse, wie z.B. Position in der Klasse (Mitschüler nicht begeistert vom Verrat) können dies auch zu einem Gefangendilemma verändern

Danke für die Aufmerksamkeit

CREDITS: This presentation template was created by **Slidesgo**,
including icons by **Flaticon**, infographics & images by **Freepik**
and illustrations by **Stories**



Quellen

<https://medium.com/decisionlab-co-uk/braess-paradox-e4f737007059> letzter Zugriff: 23.06. 19:30

<https://www2.hs-fulda.de/~grams/dnkfln.htm> letzter Zugriff: 23.06. 19:30

<https://www.lecturio.de/magazin/braess-paradoxon/> letzter Zugriff: 23.06. 19:30

<https://de.wikipedia.org/wiki/Braess-Paradoxon> letzter Zugriff: 23.06. 19:30

<https://www.l-iz.de/wirtschaft/mobilitaet/2019/06/Das-Braess-Paradoxon-und-der-Gordische-Knoten-am-Leipziger-Promenadenring-280103> letzter Zugriff: 23.06. 19:30

<https://dewiki.de/Lexikon/Braess-Paradoxon> letzter Zugriff: 23.06. 19:30

<https://de.wikipedia.org/wiki/Gefangenendilemma> letzter Zugriff: 18.06. 14:20

https://de.wikipedia.org/wiki/Big_Dig#/media/Datei:Boston-big-dig-area.png letzter Zugriff: 23.06. 17:45

<https://uh.edu/engines/epi2814.htm> letzter Zugriff: 23.06. 17:45

https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:EBay_former_logo.svg letzter Zugriff: 23.06. 17:45

Quellen

<https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~spielth/vortraegeopen/Das%20Gefangenendilemma.pdf> letzter Zugriff: 18.06. 13:00

<https://youtu.be/0Ttb606HfTU?list=TLPQMTgwNjJwMjGK89LU6V5Wgw> letzter Zugriff: 18.06. 13:20

<https://de.wikipedia.org/wiki/Nash-Gleichgewicht> letzter Zugriff: 18.06. 13:20

<https://studyflix.de/wirtschaft/nash-gleichgewicht-in-reinen-strategien-103> letzter Zugriff: 18.06. 13:20

<https://youtu.be/L8BDjqKVxAM?list=TLPQMTgwNjJwMjHX7IRi55zIRg> letzter Zugriff: 18.06. 13:50

Chess Icon von mangsaabguru, letzter Zugriff: 24.06. 2:00

<https://www.businessinsider.com/london-underground-better-than-nyc-subway-2017-8>
letzter Zugriff: 23.06. 17:45

<https://www.google.de/> letzter Zugriff: 23.06. 17:45

<https://press.aboutamazon.com/images-videos/> letzter Zugriff: 23.06. 17:45

