1.Mechanik

1.1. Kinematik

1.1.1. Modell der Punktmasse (PM) und Koordinatensysteme (KS)

Def. PM: Volumen $V = 0$ Einheit: $[V] = m^3$

Masse m = endlich groß $[m] = kg$

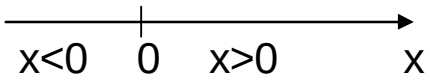
Dichte $\rho = m/V$ $= \infty$ $[\rho] = kg/m^3$

Folgen: - Ort genau angebbar

- Drehung um sich selbst nicht möglich!

Ortsangabe erfolgt in einem Koordinatensystem (KS):
hier: Kartesisches KS (rechtwinklig)

a)



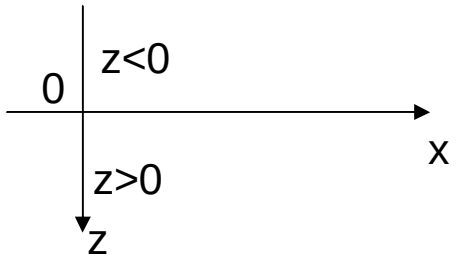
Dimensionalität:

a) 1-dim. (Gerade) x-, y-, oder z-Achse

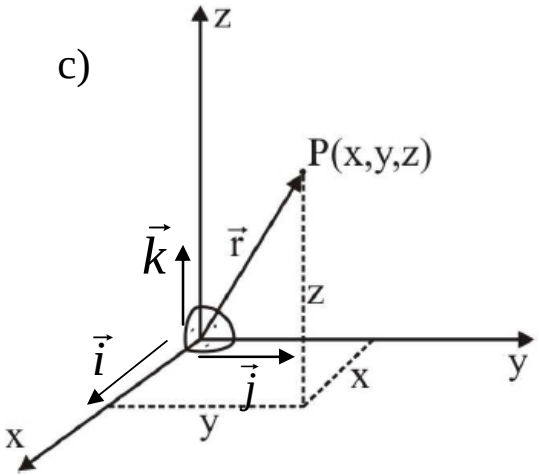
b) 2-dim. (Ebene) x-y oder x-z-Achse

c) 3-dim. (Raum) x-y-z-Achse

b)



c)



Ort des Punktes P(x,y,z) mit Koordinaten (x,y,z) durch Ortsvektor festgelegt:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

mit Betrag (Länge)

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

(Wiederholung Vektorrechnung)

Einheitsvektoren: $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ oder $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

mit $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

und $\vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

1.1.2. Definition Geschwindigkeit und Beschleunigung

1.1.2.1. Eindimensionale Bewegung der PM

Def.Geschwindigkeit: $[v]$ = m/s

Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

t_1, t_2 – Anfangs- u. Endzeit

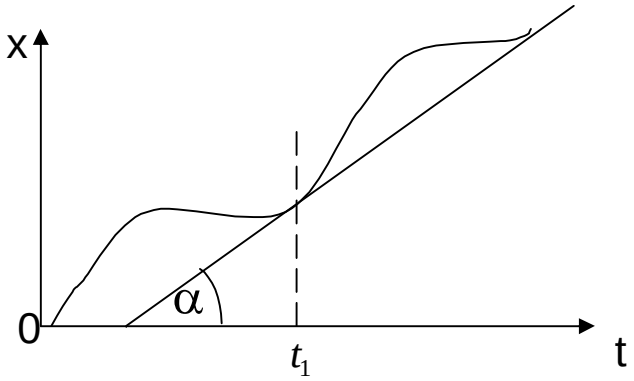
x_1, x_2 – Anfangs- u. Endort

Exp.: Geschw. Luftgewehrkugel

Momentangeschwindigkeit:

$$v = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

Differenzialquotient



"1.Ableitung von x nach t"

v hängt oft von der Zeit ab: z.B.:

z.B.: $\dot{x}(t_1)$ = Anstieg "tan α " der x-t-Kurve zum Zeitpunkt t_1, $v(t_1)$ ist Tangente an $x(t)$ Kurve bei t_1

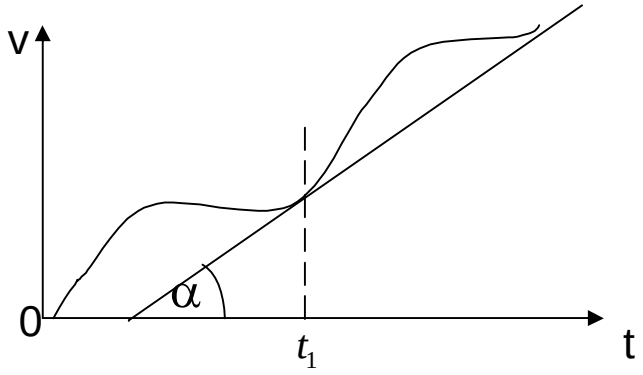
Def.Beschleunigung: $[a] = \mathrm{m/s^2}$

Durchschnittsbeschleunigung: $\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

t_1, t_2 – Anfangs- u. Endzeit

v_1, v_2 – Anfangs- u. Endgeschwindigkeit

Momentanbeschleunigung: $a = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$



Exp.: 1-dim allg. Bewegung

"1.Ableitung von *v* nach *t*"

"2.Ableitung von *x* nach *t*"

a hängt oft von der Zeit ab: z.B.:

z.B.: $\dot{v}(t_1)$ = Anstieg "tan α " der *v*-*t*-Kurve zum Zeitpunkt t_1

$a(t_1)$ ist Tangente an $v(t)$ Kurve bei t_1

1.1.2.2. Dreidimensionale Bewegung der PM

Durchschnittsgeschwindigkeit:

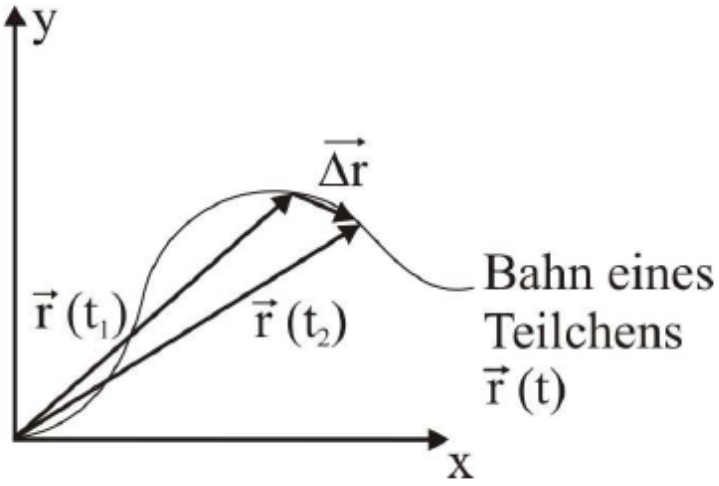
$$\vec{\bar{v}} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

t_1, t_2 – Anfangs- u. Endzeit
$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ – Anfangs- u. Endort

Momentangeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

Differenzialquotient



$\vec{v}(t)$ ist Vektortangente an $\vec{r}(t)$

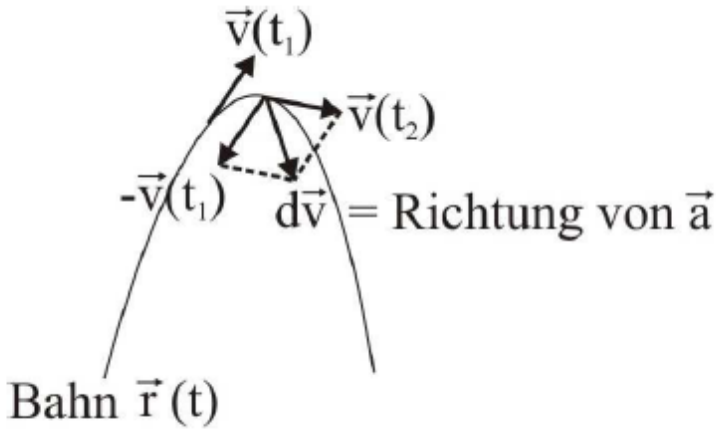
Durchschnittsbeschleunigung: $\vec{\bar{a}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

t_1, t_2 – Anfangs- u. Endzeit

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$ – Anfangs- u. Endgeschwindigkeit

Momentanbeschleunigung: $\vec{a} = \lim_{t\to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$

Differenzialquotient



$\vec{a}(t)$ ist Vektortangente an $\vec{v}(t)$

1.1.3. Beispiele

1.1.3.1. Gleichförmige, geradlinige (1-dim) Bewegung der PM

$v = v_0 = const$ Anfangsbedingung: $x(t_0) = x_0$

$v_0 = \frac{dx}{dt}$ Separation der Variablen (x, t) $\longrightarrow$ $dx = v_0 dt$

Integration $\longrightarrow$ $\int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v_0 dt$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)}$$

Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen, geradlinigen Bewegung

1.1.3.2. Gleichförmig beschleunigte, geradlinige (1-dim) Bewegung der PM

$a = a_0 = const$ Anfangsbedingung: $x(t_0) = x_0, \quad v(t_0) = v_0,$

$$a_0 = \frac{dv}{dt} \xrightarrow{\text{Separation der Variablen } (v,\, t)} dv = a_0 dt$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^{t} a_0 dt$$

$$\boxed{v(t) = v_0 + a_0 (t - t_0)}$$

Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz der gleichförmig, beschleunigten geradlinigen Bewegung

$$v = \frac{dx}{dt} \quad \xrightarrow{\text{Separation der Variablen } (x,\, t)} \quad dx = v(t)\,dt$$

$$\xrightarrow{\text{Integration}} \quad \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} \left[v_0 + a_0 (t - t_0) \right] dt$$

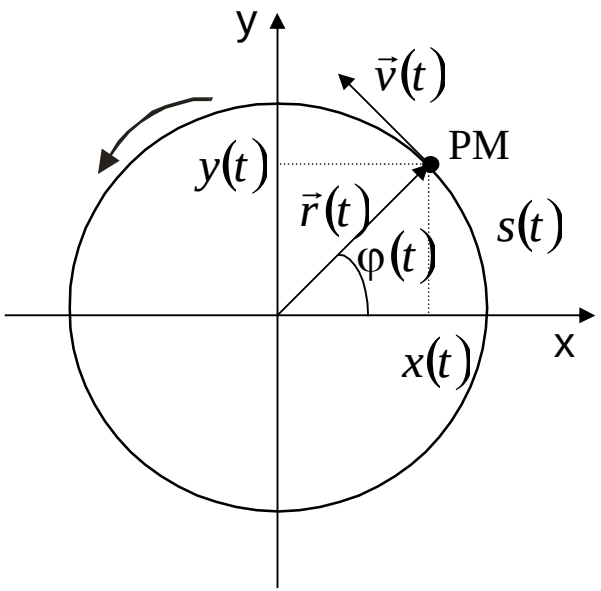
$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2}$$

Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmig, beschleunigetn geradlinigen Bewegung

1.1.3.2. Gleichförmige Kreisbewegung - 2-dim. Bewegung der PM

2-dim. Bewegung in x-y Ebene – Kreisbahn

Drehachse entlang z-Achse



Ortsvektor: $\vec{r}(t)$, $|\vec{r}(t)| = r = const$

Radius der Kreisbahn

PM bewegt sich auf Kreisbogen:

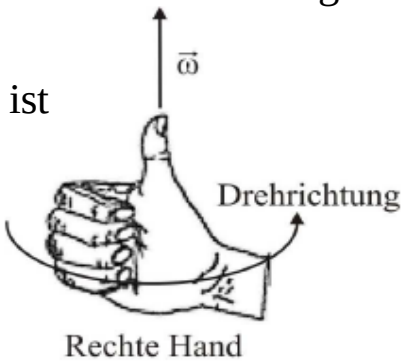
$$s(t) = r\varphi(t)$$

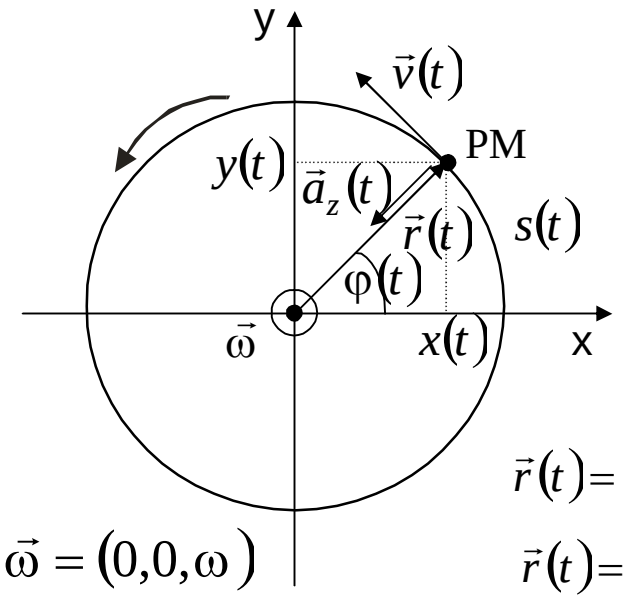
Definition Winkelgeschwindigkeit: $[\omega] = \text{rad s}^{-1} = \text{s}^{-1}$

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(s(t)/r)}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{|\vec{v}|}{r}$$

$\vec{v}$ - Bahngeschwindigkeit, tangentielle Geschwindigkeit

Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ ist Vektor entlang Drehachse:





gleichförmige Kreisbewegung: $|\vec{\omega}| = \omega = const$

$$d\varphi = \omega\, dt \xrightarrow{\text{Integration}} \int_{\varphi_0=0}^{\varphi(t)} d\varphi = \int_{t_0=0}^{t} \omega\, dt$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z=0) \quad \text{mit} \quad x(t) = r\cos\varphi(t) \quad y(t) = r\sin\varphi(t)$$

$$\vec{r}(t) = r(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$$

Exp.: Messung x(t), y(t) - Plattenspieler

Bahngeschwindigkeit: $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = r\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0)$

$\vec{v} \perp \vec{r}, \vec{v} \perp \vec{\omega}$ ⟶

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Zentripetalbeschleunigung:: $\vec{a}_z(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -r\omega^2(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0)$

$$\vec{a}_z(t) = -\omega^2\vec{r} = -\frac{v^2}{r}\frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_z = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$|\vec{a}_z| \neq 0$ ⟹

Vektorprodukt (rechte Handregel)

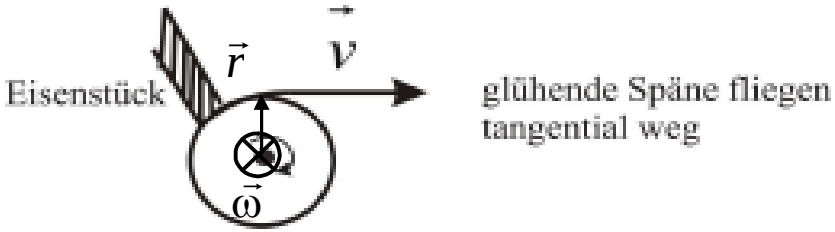
gleichförmige Kreisbewegung ist beschleunigte Bewegung

Exp.: Schleifscheibe und Vektorprodukt

Vektorprodukt (rechte Handregel)

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Exp.: Schleifscheibe und Vektorprodukt



1.2. Dynamik - Kräfte

Kraft F $[F] = \text{kg m/s}^2$

Kräfte sind Ursache für Geschwindigkeitsänderungen, d. h. Änderungen des Bewegungszustandes, einer PM

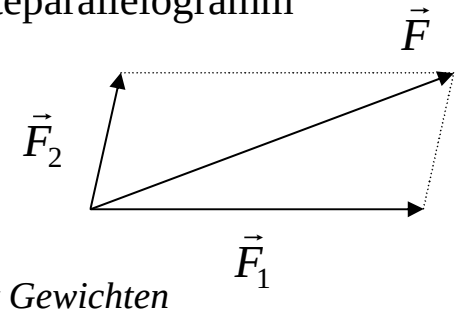
1.2.1. Kräfte als Vektoren

Kräfte sind Vektoren und addieren bzw. subtrahieren sich wie diese:

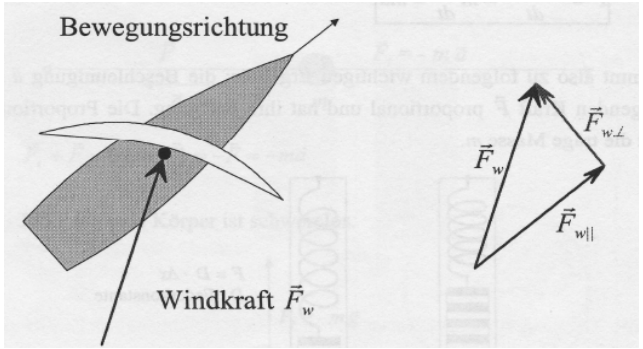
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = (F_x, F_y, F_z)$$

Kräfteparallelogramm

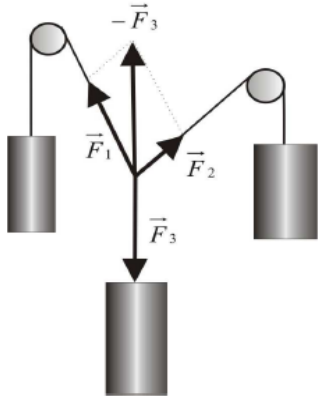
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



Bsp.: Segeln



Exp.: Kräftegleichgewicht mit Gewichten



Gleichgewicht: $\sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$$

1.2.2. Newtonsche Axiome

Newtonsche Axiome sind Grundgleichungen der klassischen Mechanik

1. Axiom - Trägheitsgesetz

Eine PM verbleibt in Ruhe oder in gleichförmiger geradliniger Bewegung, sofern auf sie keine äußeren Kräfte einwirken.

$$\vec{F}_{ges} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 0$$

Koordinatensysteme (KS) in denen das 1. Axiom gilt heißen Intertialsysteme

Intertialsysteme: KS ruht oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$

$\vec{v} = const$

Exp.: rollende Kugel auf Ebene

Exp.: Flasche und Tischtuch

2. Axiom - Aktionsprinzip

Kraft ist Masse mal Beschleunigung:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

mit $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$ ⟶ $\vec{F} = m\dot{\vec{v}} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$ [p] = kg m /s (Charakterisiert Bewegungszustand einer PM)

Die zeitliche Änderung des Impulses einer PM ist gleich der wirkenden Kraft:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

3. Axiom - Reaktionsprinzip

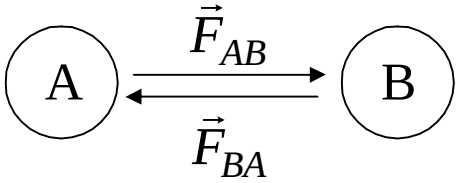
Wenn zwei PM miteinander wechselwirken, dann besitzen die Kräfte, welche die PM aufeinander ausüben, den selben Betrag aber entgegengesetzte Richtungen:

$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

$F_{AB} = F_{BA}$

$\vec{F}_{AB}$ Kraft von PM A auf PM B

$\vec{F}_{BA}$ Kraft von PM B auf PM A

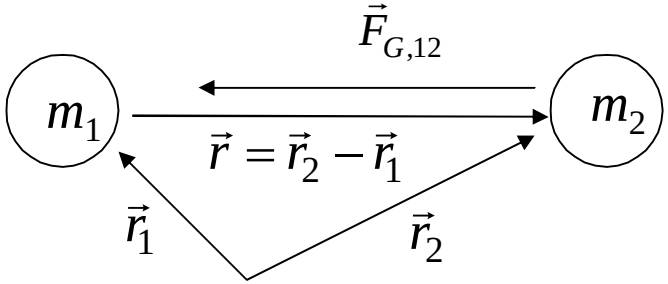


Exp.: Rollwaagen

1.2.3. Spezielle Kräfte

1.2.3.1. Gravitationskraft

Anziehende Kraft zwischen zwei PM m_1 and m_2



$\vec{F}_{G,12}$ - Kraft von m_1 auf m_2

$\vec{F}_{G,21}$ - Kraft von m_2 auf m_1

Newtonsches Gravitationsgesetz:

$$\vec{F}_{G,12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)^2} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{\vec{r}^{\,2}} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Gravitationskonstante:

$\gamma = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}$

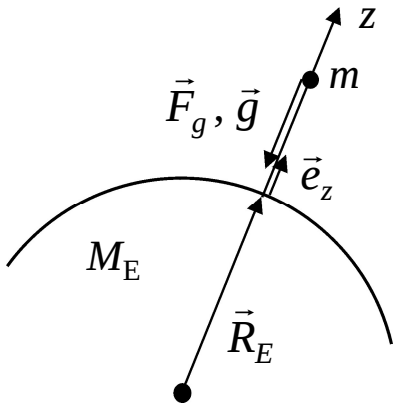
Newton´s 3. Axiom: $\vec{F}_{G,12} = -\vec{F}_{G,21}$

Gravitationskraft wirkt entlang Verbindungsvektor $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ zwischen m_1 und m_2

→ **Gravitationskraft ist „Zentralkraft“**

1.2.3.2. Schwerkraft - Gewichtskraft

- Spezialfall der Gravitationskraft
- Gravitationskraft die Erde auf eine Masse *m* in der Nähe der Erdoberfläche ausübt



Erdmasse: $m_1 = M_E \approx 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg

Erdradius: $r = R_E \approx 6370 \cdot 10^3$ m

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{mM_E}{(R_E + z)^2} \vec{e}_z$$

mit $$(R_E + z)^2 = R_E^2 \left(1 + \frac{z}{R_E}\right)^2 \approx R_E^2 \qquad z << R_E$$

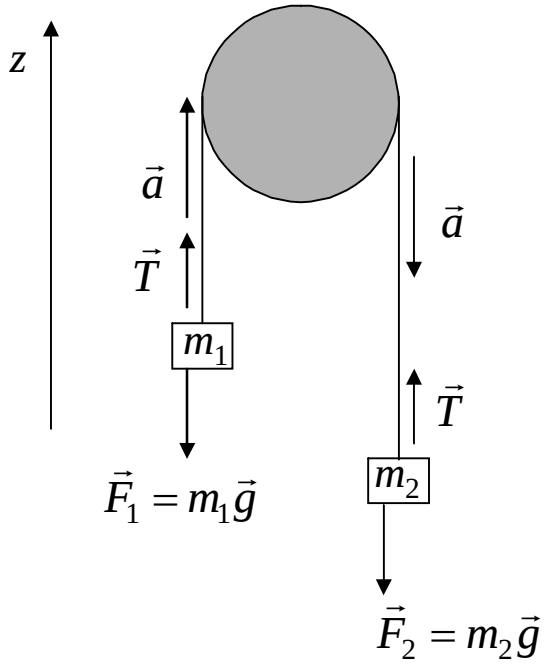
$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{M_E}{R_E^2} m\vec{e}_z$$

$$\boxed{\vec{F}_g = -gm\vec{e}_z = m\vec{g}}$$

mit Fallbeschleunigung: $g = \frac{\gamma M_E}{R_E^2} = 9{,}81$ m/s^2

Bestimmung von g mit Atwoodscher Fallmaschine

Exp.: Atwoodsche Fallmaschine



$\vec{T}$ - Zugspannung, Zugkraft im Seil

- $m_2 > m_1$

- Vernachlässigen Reibung sowie Massen des Seils und der Rolle

2. Newtonsches Axiom: $m\,a = F$

(I) Abwärtsbewegung: $-m_2\,a = -m_2\,g + T$

(II) Aufwärtsbewegung: $m_1\,a = T - m_1\,g$

(II) – (I): $m_1\,a + m_2\,a = -m_1\,g + m_2\,g$

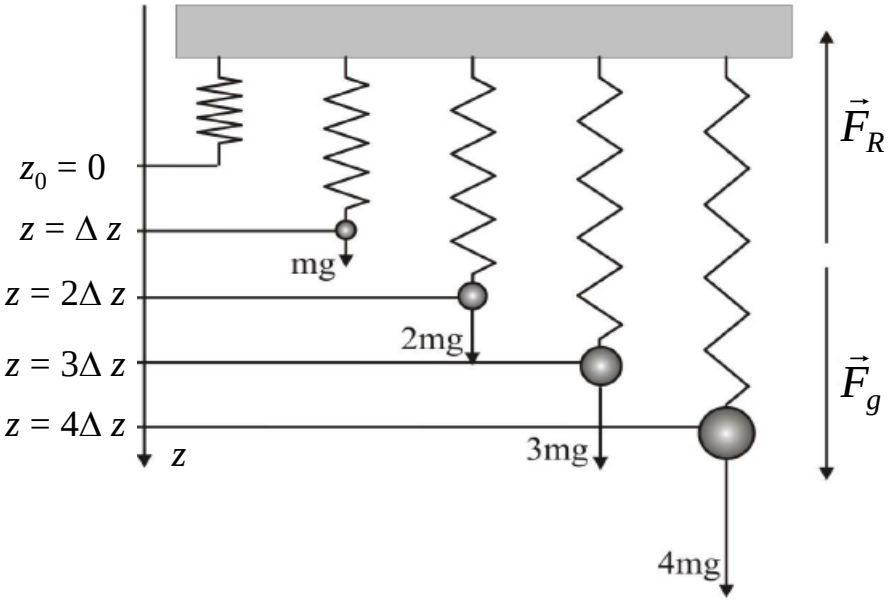
$$\longrightarrow \quad g = \frac{m_2 + m_1}{m_2 - m_1}\,a$$

$a < g$

Fallbewegung kann mit einfachen Mittel untersucht werden

1.2.3.3. Federkraft

- elastische Kraft die bei Dehnung oder Stauchung einer Feder (z. B. Spiralfeder) auftritt
- kann zur Messung anderer Kräfte genutzt werden (Federkraftmesser)



$\vec{F}_R$ - Federkraft, rückstellende Kraft

Kräftegleichgewicht, $\sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\vec{F}_R + \vec{F}_g = 0 \quad \longrightarrow \quad -\vec{F}_R = \vec{F}_g$$

$$F_R = -F_g$$

Hook´sche Gesetz:

$$F_R = -K\,\Delta z$$

$$F_g = K\,\Delta z \quad \longrightarrow$$ Messung der Gewichtskraft durch Federkraftmesser

K - Federkonstante

Exp.: Federkraftmesser

$[K] = \mathrm{kg/s^2} = \mathrm{N/m}$

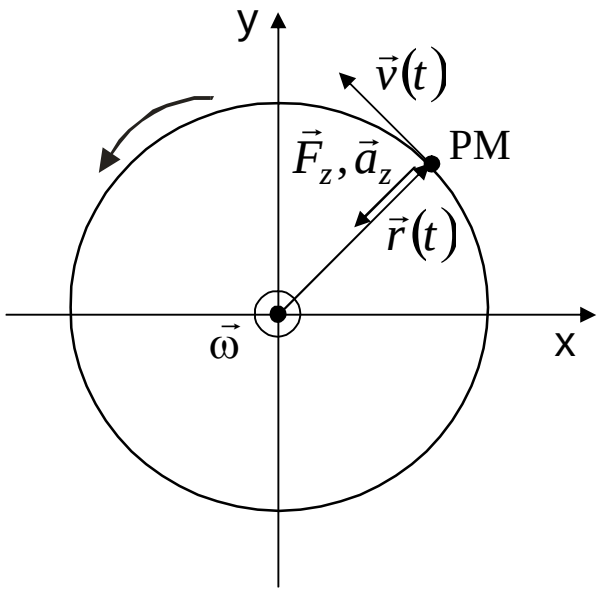
1.2.3.4. Zentripetalkraft

gleichförmige Kreisbewegung ist beschleunigte Bewegung mit Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_z = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

→ 2. Newton´sches Axiom: $\vec{F} = m\vec{a}$

Zentripetalkraft wirkt in Richtung des Zentrums der Kreisbahn

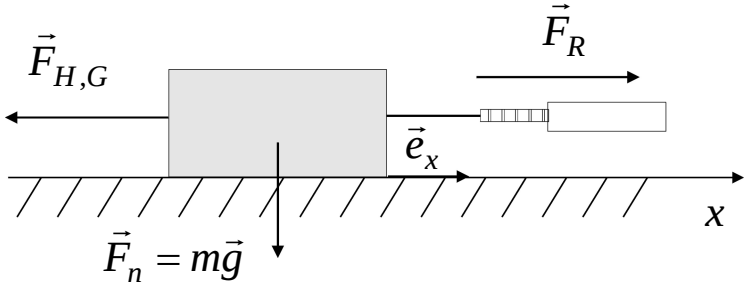
$$\vec{F}_z = m\vec{a}_z = m\vec{\omega} \times \vec{v} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



Exp.: Federkraftmesser mit rotierender Masse
Papierscheibe und Kreide
Konisches Pendel

1.2.3.5. Reibungskräfte

1.2.3.5.1. Haft- und Gleitreibung



$\vec{F}_{H,G}$ - Reibungskraft (H – Haftreibung)
(G – Gleitreibung)

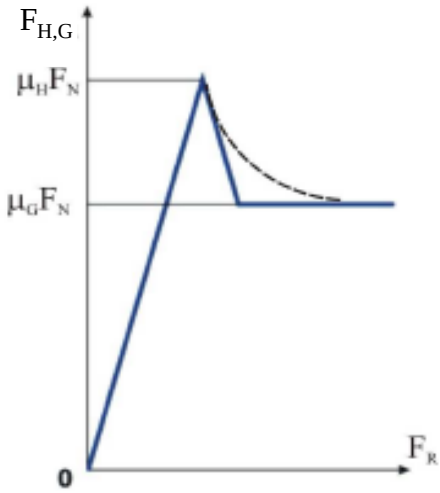
$\vec{F}_n$ -Normalkraft, senkrecht zur Unterlage

$$\vec{F}_{H,G} = -\mu_{H,G}\left|\vec{F}_n\right|\vec{e}_x$$

$$F_{H,G} = \mu_{H,G} F_n$$

es gilt im allgemeinen

$\mu_H > \mu_G$



$\mu_{H,G}$ - Reibungskoeffizienten
(abhängig von Beschaffenheit der Kontaktflächen)

Exp.: Holzblock auf Holz, Messung von Reibungskräften mit Federkraftmesser
Schlaufe mit Gewicht auf schräger Achse
Ankerspill

1.2.3.5.2. Reibung in Fluiden

Reibungskraft ist Funktion der Geschwindigkeit des Körpers $F = f(v)$

a) Stokes Reibung bei kleinen Geschwindigkeiten

Bedingung: laminare Strömung (auftretende Wirbel sind stationär)

→ $\boxed{\left|\vec{F}_S\right| \propto \left|\vec{v}\right|}$

Bsp. Kugel mit Radius r: $\vec{F}_S = -6\pi r\eta\,\vec{v}$ Stoke´sches Gesetz

η - Viskosität des Fluids, $[\eta] = \text{kg (ms)}^{-1}$

b) Newton Reibung bei hohen Geschwindigkeiten

Bedingung: turbulente Strömung (auftretende Wirbel sind instationär)

→ $\boxed{\left|\vec{F}_N\right| \propto \vec{v}^2}$

$$\vec{F}_N = -\frac{\rho}{2} c_w A \vec{v}^2 \frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

ρ - Dichte des Fluids

c_w - Wert

A - Querschnitt des Körpers

Exp.: laminare und turbulente Strömungen

1.2.3.6. Trägheitskräfte

-Trägheitskräfte treten auf, wenn Bewegung einer PM bzgl. eines beschleunigten KS (KS´) beschrieben wird

-Trägheitskräfte sind Scheinkräfte

KS´ bewegt sich mit Beschleunigung $\vec{a}_R$ bzgl. Inertialsystem KS

PM mit Masse *m*	in KS	in KS´
Beschleunigung von *m*	$\vec{a}$	$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_R$
Kraft auf *m*	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{F}' = m\vec{a}'$

→ $\vec{F}' = \vec{F} - m\vec{a}_R$ → $\vec{F}_T = -m\vec{a}_R$

$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_T$

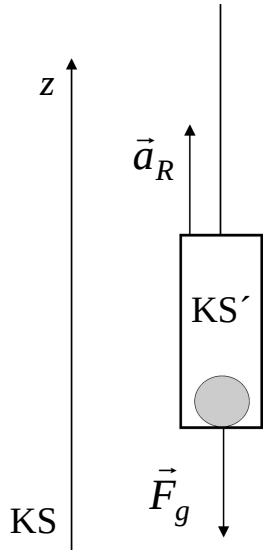
$\vec{F}_T$ ist Trägheitskraft

Beispiel:
beschleunigter Fahrstuhl

$\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$

$\vec{a}_R = (0,0,a_R)$

Exp.: Poggendorf Waage



$\vec{F}' = \vec{F}_g + \vec{F}_T$ $\qquad$ $\vec{F}_T = -m\vec{a}_R$

$\vec{F}' = -mg\vec{e}_z - ma_R\vec{e}_z$

$\vec{F}' = -m(g + a_R)\vec{e}_z$

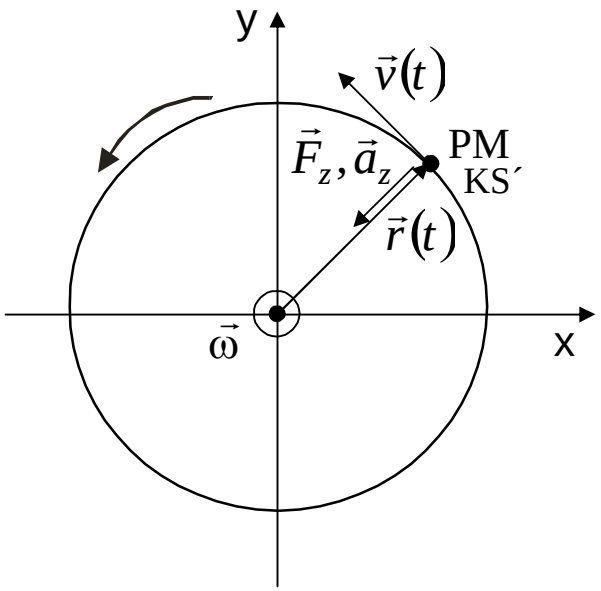
freier Fall: $\vec{a}_R = (0,0,-g)$

$\rightarrow$ $\vec{F}' = 0$ fallender Körper ist schwerelos

Beispiel: gleichförmige Kreisbewegung

Zentripetalkraft: $\vec{F}_z = m\vec{\omega} \times \vec{v} = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

KS



KS´ rotiert mit PM $\rightarrow$ $\vec{F}' = \vec{F}_z + \vec{F}_T = 0$

$\vec{F}_T = -\vec{F}_z$

Zentrifugalkraft:

$\vec{F}_T = \vec{F}_{zf} = -m\vec{v} \times \vec{r} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

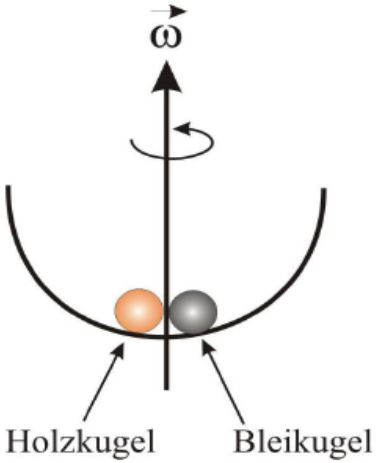
Anwendung: Zentrifuge $\qquad$ $\vec{F}_{zf} \propto m$

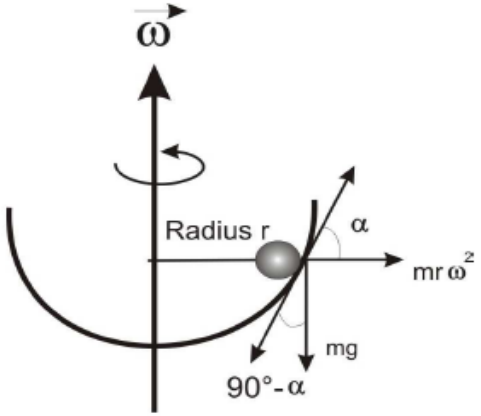
Trennung nach Masse

Exp.:

Kräftegleichgewicht $\vec{F}_{zf,eff} = \vec{F}_{g,eff}$

$\vec{F}_{zf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$





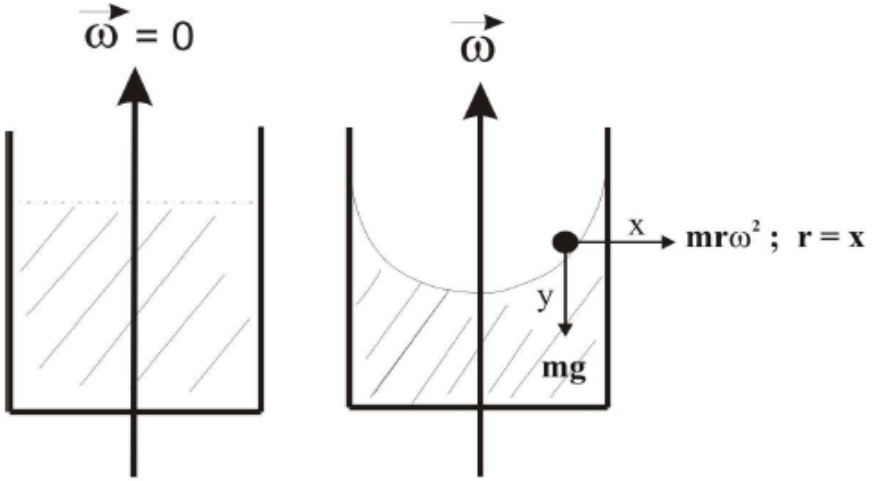
$m\omega^2 r\cos\alpha = mg\sin\alpha$

$\tan\alpha = \frac{\omega^2 r}{g}$

Steighöhe ist nicht von *m* abhängig

Exp.: rotierende Küvette

Kräftegleichgewicht $\vec{F}_{zf,eff} = \vec{F}_{g,eff}$



$\tan\alpha = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}$

$y(x) = \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{g}x^2$

Flüssigkeitsoberfläche ist Parabel

1.2.3. Bewegungsgleichung einer PM

allg. Bewegungsgleichung: $\boxed{\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}}$ beruht auf 2. Newtonschen Axiom

zweifache Integration der Bewegungsgleichung nach der Zeit ergibt Weg-Zeit-Gesetz $\vec{r}(t)$ der PM

$$\vec{v}(t) = \frac{1}{m}\int \vec{F}dt + c_1$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt + c_2 = \frac{1}{m}\int \left[\int \vec{F}dt'\right]dt + \int c_1 dt + c_2$$

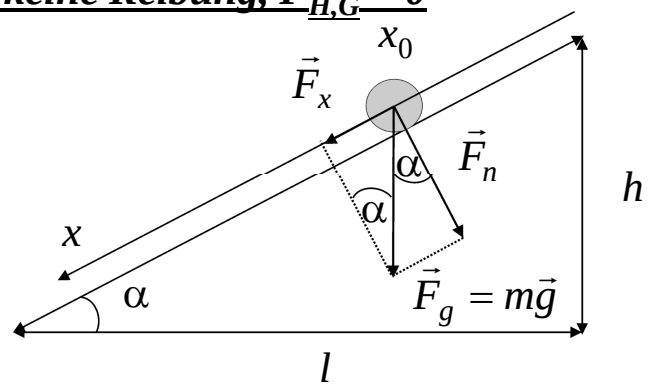
Die Integrationskonstanten c_1 und c_2 sind durch die Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmt.

z. B.: $\vec{r}(t = t_0) = \vec{r}_0$

$\vec{v}(t = t_0) = \vec{v}_0$

1.2.3.1. Schiefe Ebene

a) keine Reibung, $F_{H,G} = 0$



keine Reibung, $F_R = 0$

Normalkraft: $F_n = mg\cos\alpha$

Hangabtriebskraft: $F_x = mg\sin\alpha$

Anfangsbedingungen: $x(t = t_0) = x_0$, $v(t = t_0) = v_0$, $t_0 = 0$

1. Integration (bestimmt) der Bewegungsgleichung:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_x dt = \int_{0}^{t} g\sin\alpha\, dt \quad \longrightarrow \quad v(t) = v_0 + g\sin\alpha\, t$$

2. Integration (bestimmt) der Bewegungsgleichung:

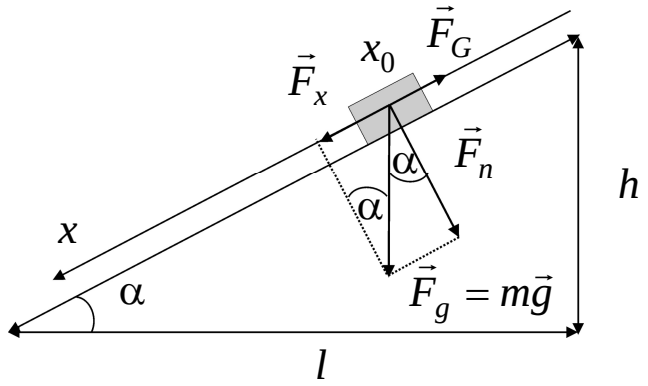
$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} (v_0 + g\sin\alpha\, t)dt \quad \longrightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g\sin\alpha\, t^2$$

gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung

Exp.: Vergleich Impulsänderung und wirkende Kraft auf schiefer Ebene

b) mit Gleitreibung, F_G



$$F_{x,ges} = F_x - F_G \qquad F_G = \mu_G F_n = mg\mu_G \cos\alpha$$

$$F_{x,ges} = mg\sin\alpha - mg\mu_G \cos\alpha$$

1. Integration (bestimmt) der Bewegungsgleichung:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F_{x,ges}\,dt = \int_{0}^{t} g\left(\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha\right)dt \quad \longrightarrow \quad v(t) = v_0 + g\left(\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha\right)t$$

2. Integration (bestimmt) der Bewegungsgleichung:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \quad \longrightarrow \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g\left(\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha\right)t^2$$

gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung

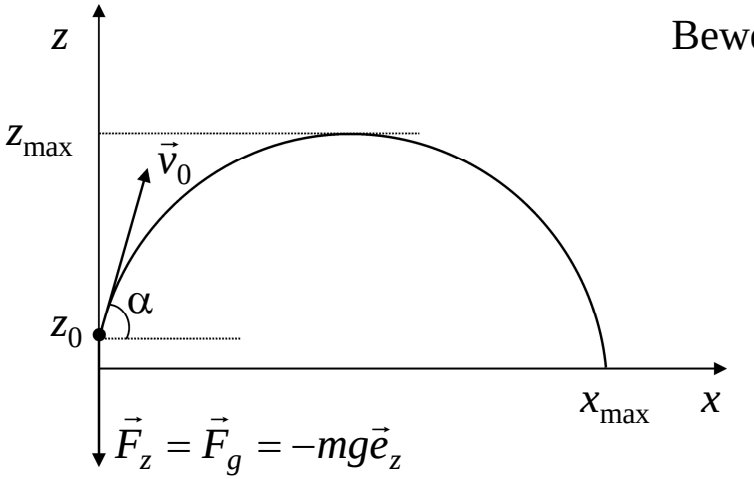
falls $\sin\alpha - \mu_G \cos\alpha = 0$ $\longrightarrow$ $\tan\alpha = \mu_G$ gleichförmige, geradlinige Bewegung

d.h. $F_x = F_G$

Exp.: schiefe Ebene mit Reibung

1.2.3.2. Wurfbewegung

Wurf in *xz*-Ebene



Bewegungsgleichung: $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

$$(F_x, F_y, F_z) = m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

$$(0,0,-mg) = m(\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$$

vertikale (z) und horizontale (x) Bewegung sind unabhängig voneinander

Exp.: Unabhängigkeit der Bewegung

Lösung der Bewegungsgleichung für jede Komponente *x, y, z* durch zweifache Integration

nach der Zeit mit Anfangsbedingungen $\vec{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, 0, v_0 \sin\beta)$

$$\vec{r}_0 = (0,0,z_0)$$

→ $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \qquad y(t) = 0 \qquad z(t) = z_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$

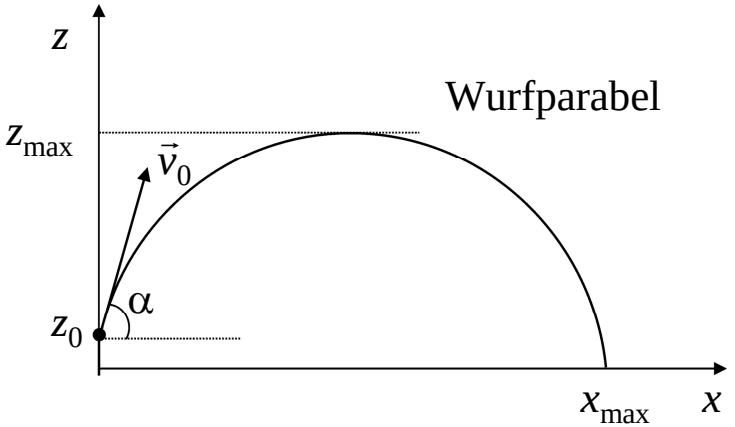
gleichförmig Bewegung in *x*-Richtung

gleichförmig beschleunigte geradlinige Bewegung in *z*-Richtung

Bahngleichung: $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \longrightarrow t = \dfrac{x(t)}{v_0 \cos\alpha}$

einsetzen in $z(t) = z_0 + v_0 \sin\alpha\, t - \dfrac{1}{2} g t^2$

$$\longrightarrow \boxed{z = z_0 + x\tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}}$$



- **Reichweite** x_{max} für $z_0 = 0$ aus $z = 0$:

$$0 = x_{max}\tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{x_{max}^2}{v_0^2\cos^2\alpha} = x_{max}\left(\tan\alpha - \frac{g}{2}\frac{x_{max}}{v_0^2\cos^2\alpha}\right)$$

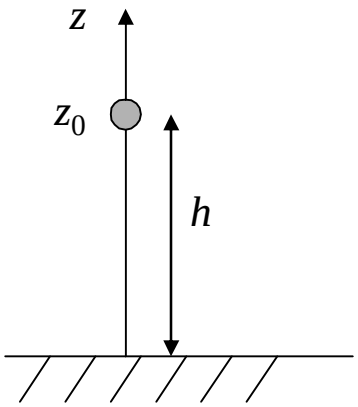
$$\boxed{x_{max} = \frac{2}{g}v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha} \longrightarrow \text{maximale Reichweite für } \alpha = 45°$$

- **Höhe** z_{max} für $z_0 = 0$: Extremwertaufgabe $\dfrac{dz}{dx} = 0$

$$\frac{dz}{dx} = \tan\alpha - g\frac{x}{v_0^2\cos^2\alpha} = 0 \longrightarrow x = \frac{v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} \longrightarrow z_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$$

Exp.: Simulation Wurfbewegung

Spezialfall: Vertikaler Wurf aus Höhe $z_0 = h$:



$$z(t) = z_0 + v_0 \sin\alpha \; t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\downarrow \quad \alpha = 90°$$

$$z(t) = h + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Spezialfall: Freier Fall aus Höhe $z_0 = h$ mit $v_0 = 0$:

$$z(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

Fallzeit t_f: $\quad 0 = h - \frac{1}{2} g t_f^2 \quad \longrightarrow \quad t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

Exp.: - Freier Fall, tf = f(h) zur Bestimmung von g

- Darstellung $t_f^2 = 2h/g$ d.h. $t_f^2 = m\,h$ ist Gerade mit Anstieg $m = 2/g$

Bestimmung von Anstieg m über lineare Regression und

Ermittlung von g aus Anstieg m und g =2/m

1.2.3.3. Freier Fall mit Stokes Reibung

Kugelfall in Fluid mit Viskosität η
(Vernachlässigung von Auftrieb)

Reibungskraft: (Stokes)
$$\vec{F}_S = -6\pi r\eta\,\vec{v}$$
$$\vec{F}_S = -R\vec{v}$$

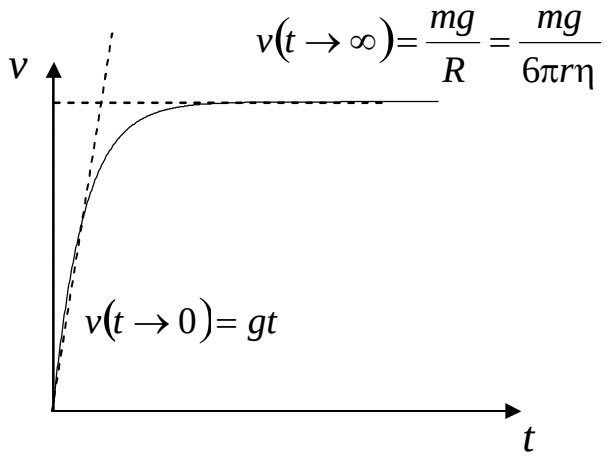
Bewegungsgleichung:
$$F_g + F_S = m\ddot{z}$$
$$mg - Rv = m\frac{dv}{dt}$$

$$\int_{t_0=0}^{t} dt = \int_{v_0=0}^{v} \frac{dv}{\left(g - \frac{R}{m}v\right)} \quad \rightarrow \quad t = -\frac{m}{R}\ln\left(1 - \frac{R}{mg}v\right)$$

$$\rightarrow \quad v(t) = \frac{mg}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{m}t}\right)$$

$$\int_{x_0=0}^{x} dx = \int_{t_0=0}^{t} v(t)\,dt$$

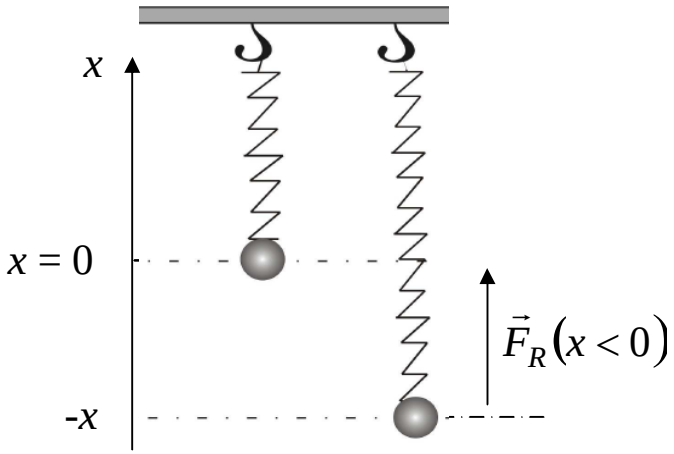
$$\rightarrow \quad x(t) = \frac{mg}{R}\left(t + \frac{m}{R}\left[e^{-\frac{R}{m}t} - 1\right]\right)$$



Anwendung: Kugelfallviskositätsmessung

Exp.: Kugelfall in Wasser

1.2.3.4. Freier ungedämpfter harmonischer Oszillator



Auslenkung der PM mit Masse *m* erzeugt rückstellende Kraft:

$$\vec{F}_R(x) = -Kx\vec{e}_x$$

$$F_R(x) = -Kx$$

Bewegungsgleichung: $F = m\ddot{x} = F_R(x) \longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \longrightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + Kx = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$$

Bewegungsgln. des freien, ungedämpften harmon. Oszillators

wirkende Kraft oder Beschleunigung proportional und entgegengesetzt zur Verschiebung *x* der PM sind $\longrightarrow$ harmonische Schwingung (harmon. Oszillator)

Lösung von $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ (homogene Differentialgleichung 2.Ordnung) :

$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

da einsetzen von $x(t)$ in Bew.-gln.

$$-x_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha_0) + x_0\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \alpha_0) = 0$$

x_0 - Amplitude

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ - Kreisfrequenz

$[\omega_0] = s^{-1}$

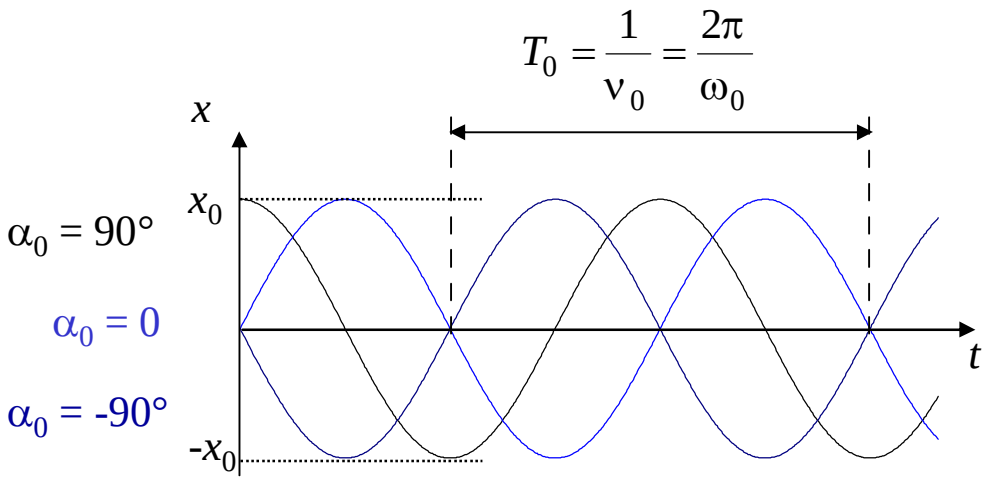
$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ - Frequenz

$[\nu_0] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \alpha_0$ - Phase der Schwingung mit Phasenkonstante α_0

$T_0 = \frac{1}{\nu_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ - Schwingungsdauer

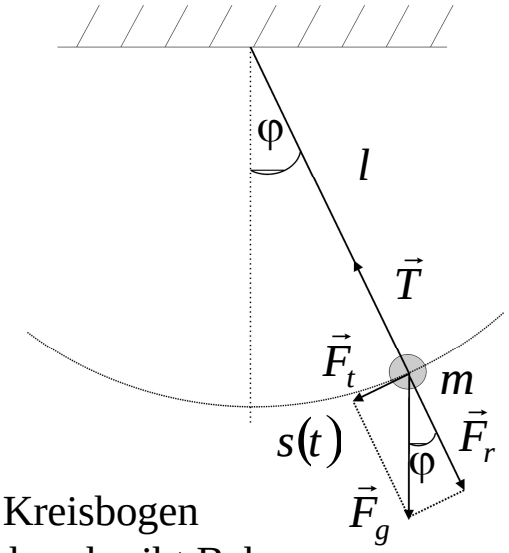
$[T_0] = s$



Anwendung: Molekülschwingungen, Gitterschwingungen

Exp.: Federschwinger, $T_0 \propto m^{1/2}$

1.2.3.5. Mathematisches Pendel



$s(t)$ - Kreisbogen beschreibt Bahn des Pendelkörpers

$F_r = mg\cos\varphi = -T$ Radialkraft spannt Faden mit Zugspannung T

$F_t = -mg\sin\varphi$ Tangentialkraft verursacht Beschleunigung

Bewegungsgleichung: $F_t = -mg\sin\varphi = m\dfrac{d^2s}{dt^2}$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\sin\varphi$$

mit Kreisbogen $s = l\varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

Grenzfall kleine Auslenkung $\varphi << 1$: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

harmonische Schwingung
(harmon. Oszillator)

Lösung: $\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$

Schwingungsdauer: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

T_0 ist unabhängig von m

Exp.: math. Pendel, $T_0 \neq m$, $T_0 \propto l^{1/2}$, $T_0 = f(g)$

1.2.3.6. Freier gedämpfter harmonischer Oszillator

freier harmonischer Oszillator mit Reibung (Stokes) Reibungskraft: $\vec{F}_S = -R\vec{v}$

Bewegungsgleichung: $m\ddot{x} = F_R(x) + F_S = -kx - Rv$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ und Dämpfungskonstante $\gamma = \frac{R}{2m}$

(homogene Differentialgleichung 2. Ordnung)

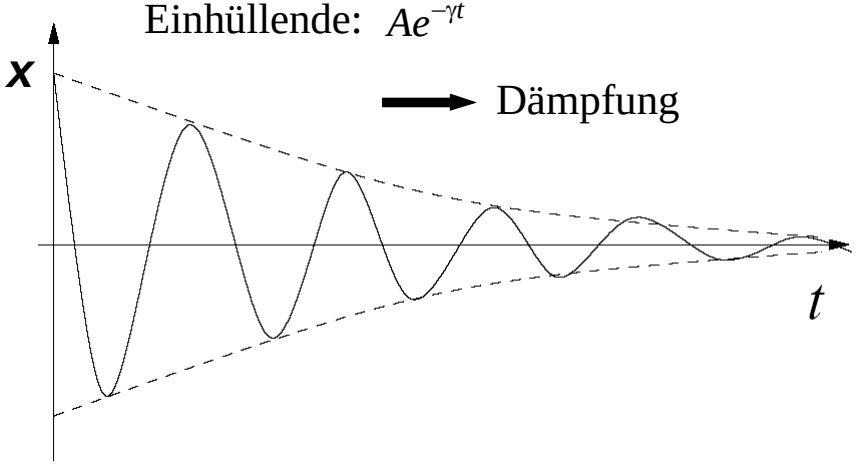
Lösung für den Fall schwacher Dämpfung $\gamma < \omega_0$**:**

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega' t + \varphi)}$$

gedämpfte Schwingung mit Frequenz

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

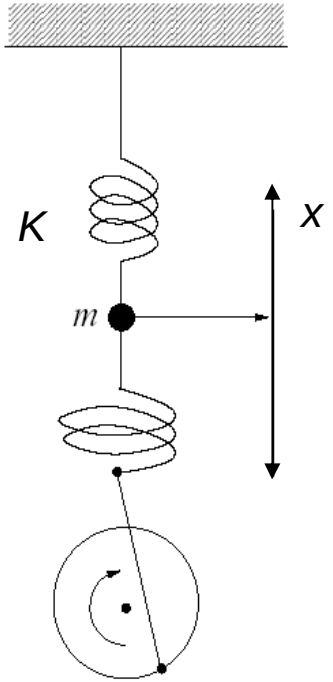
Einhüllende: $Ae^{-\gamma t}$



Anwendung: Spektroskopie im Zeitbereich
(NMR – „Free Induction Decay – FID“,
Dämpfung = Relaxation)

Exp.: Pendel in Wasser
physikalisches Pendel und Magnet

1.2.3.7. Erzwungene Schwingung



gedämpfter harmonischer Oszillator mit periodischer äußerer Kraftanregung

$F(t) = F_0 \cos\omega t$

Bewegungsgleichung: $\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f\cos\omega t}$ mit $f = \frac{F_0}{m}$

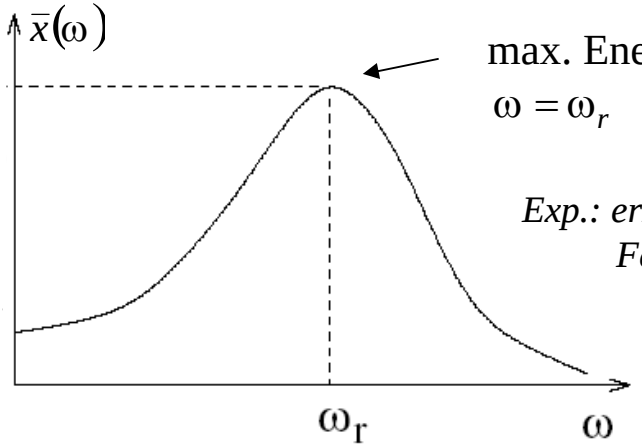
(inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung)

Lösung für $t \to \infty$, stationäre Lösung: $\boxed{x(t) = \bar{x}(\omega)\cos(\omega t + \alpha)}$

Amplitude $\bar{x}(\omega)$ ist von Erregerfrequenz ω abhängig: $\boxed{\bar{x}(\omega) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}}$

Amplitude $\bar{x}(\omega)$ hat Maximum bei der Resonanzfrequenz:

$\boxed{\omega_r = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}}$ aus $\frac{d\bar{x}(\omega)}{d\omega} = 0$



max. Energieabsorption bei $\omega = \omega_r$

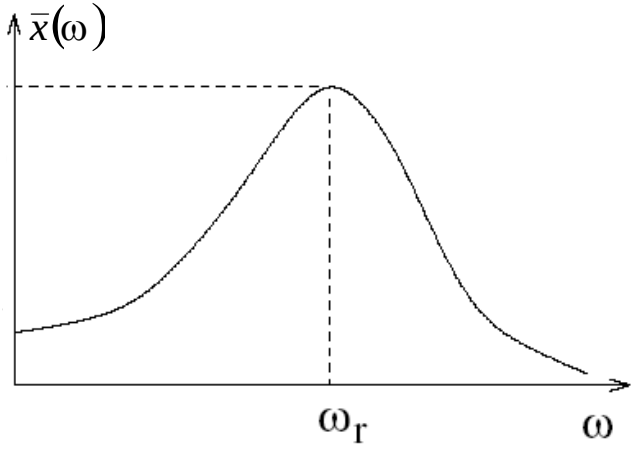
Exp.: erzwungene Schwingung mit Federschwinger

Anwendung: Wechselwirkung Licht – Materie (Absorption, Dispersion)

$$x(t) = \bar{x}(\omega)\cos(\omega t + \alpha)$$

frequenzabhängige Amplitude

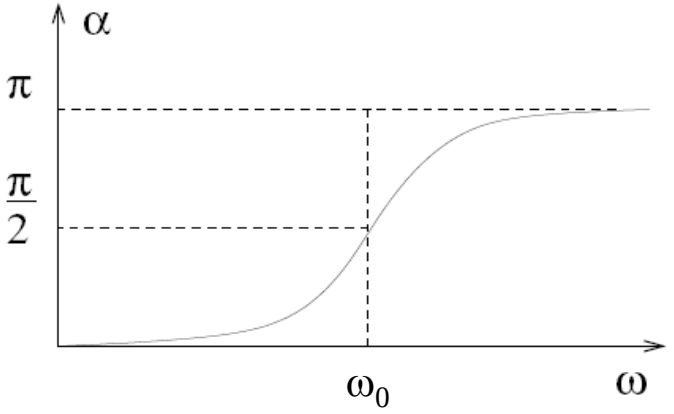
$$\bar{x}(\omega) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$



$$\omega_r = \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

frequenzabhängige Phasenverschiebung zwischen periodischer Kraftanregung und Oszillator

$$\tan\alpha = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



Exp.: Spiralfeder,
Video Tacoma Bridge

1.3. Erhaltungssätze der Mechanik

1.3.1. Energieerhaltung

1.3.1.1. Arbeit und Leistung

Arbeit:

PM m wird durch Kraft $\vec{F}$ um Weg $\Delta\vec{r}$ verschoben ⟶ $\vec{F}$ verrichtet Arbeit ΔW an PM

Arbeit wird immer gegen eine im System vorhandene Kraft (z. Bsp. Schwerkraft, Federkraft) verrichtet

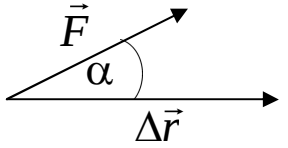
wenn $\vec{F} = const$

$$\Delta W = \vec{F}\Delta\vec{r}$$

$[W]$ = kg m^2 s^{-2} = Nm = J

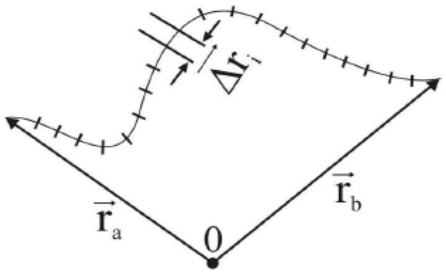
Beachte: W ist Skalarprodukt

$$\Delta W = F\Delta r\cos\alpha$$



Verallgemeinerung:

$$\Delta W_{ab} = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_i \vec{F}(\vec{r}_i)\Delta\vec{r}_i$$



$$\Delta W_{ab} = \int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r}$$

Arbeit $\Delta W > 0$, wenn Arbeit an PM verrichtet wird !

$\vec{r}_a$ - Anfangsort $\vec{r}_b$ - Zielort

Leistung:

Leistung P ist die pro Zeiteinheit an PM verrichtete Arbeit

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}} \qquad [P] = \text{Nm s}^{-1}$$

Falls W zeitunabhängig: $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

1.3.1.2. Kinetische Energie

Erfahrung sagt:
Um einen Körper zwischen $\vec{r} = 0$ und $\vec{r}$ auf eine Geschwindigkeit *v* zu beschleunigen, muss man die Arbeit ΔW verrichten.

Die Arbeit ΔW ist in Form von kinetischer Energie in dem sich bewenden Körper gespeichert.

$$\Delta W = \int_{\vec{r}=0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r})d\vec{r} = \int_{\vec{r}=0}^{\vec{r}} m\vec{a}d\vec{r} = \int_{\vec{v}=0}^{\vec{v}} m\frac{d\vec{v}}{dt}\vec{v}dt$$

$$= \int_{\vec{v}=0}^{\vec{v}} m\vec{v}d\vec{v} = \frac{m}{2}\vec{v}^2$$

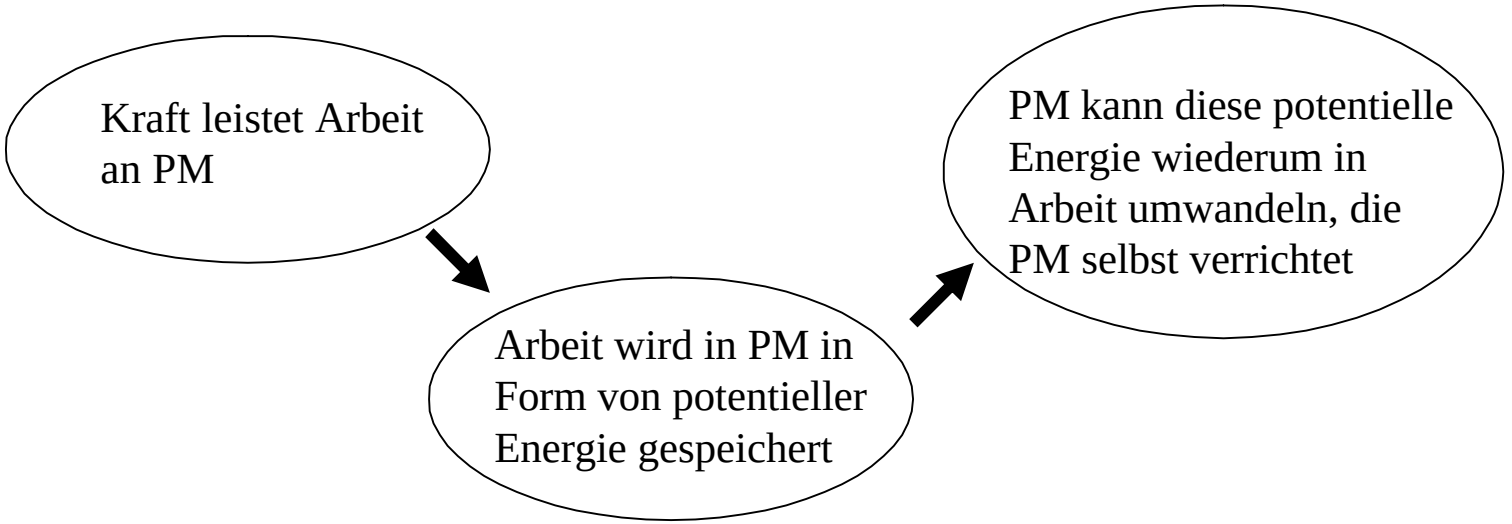
→ kinetischer Energie: $\boxed{E_{kin} = \frac{m}{2}\vec{v}^2}$ $[\Delta E_{kin}] = \text{Nm}$

1.3.1.3. Potentielle Energie

Konzept: Wenn die von der Kraft $\vec{F}$ geleistete Arbeit ΔW_{ab} nicht vom Weg, sondern nur vom Anfangsort $\vec{r}_a$ und Endort $\vec{r}_b$ abhängt, dann heißt die Kraft $\vec{F}$ "konservativ" und wir können eine potentielle Energiedifferenz $E_{pot}(\vec{r}_b, \vec{r}_a)$ definieren. $\left(\oint \vec{F} d\vec{r} = 0\right)$

Keine Reibung!

Idee:



Definition:

$$E_{pot}(\vec{r}_b, \vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = -\Delta W_{ab}$$

ΔE_{pot} ist Maß für die im System (PM) gespeicherte Arbeit

Umkehrung: $\vec{F}(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial E_{pot}(\vec{r})}{\partial x}, \frac{\partial E_{pot}(\vec{r})}{\partial y}, \frac{\partial E_{pot}(\vec{r})}{\partial z}\right)$

1.3.1.4. Energieerhaltungssatz

Berechnen die Zeitableitung der potentiellen Energie:

$$\frac{dE_{pot}(\vec{r}(t))}{dt} = \left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) + \left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial y}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right) + \left(\frac{\partial E_{pot}}{\partial z}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

$$= -\vec{F}\dot{\vec{r}} = -m\ddot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = -\frac{m}{2}\left(\frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt}\right) = -\frac{dE_{kin}}{dt}$$

$$\left(E_{kin} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{m}{2}\frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt}\right)$$

$$\rightarrow \quad \frac{dE_{kin}}{dt} + \frac{dE_{pot}}{dt} = 0$$

$$\rightarrow$$ Energieerhaltungssatz der Mechanik:
(gilt bei Vernachlässigung der Reibungskräfte)

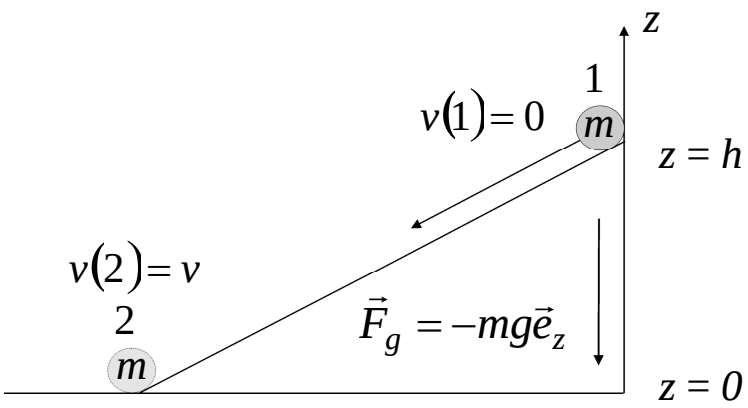
$$\frac{d}{dt}\left(E_{kin} + E_{pot}\right) = 0$$

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{ges} = const$$

Die Gesamtenergie E_{ges} eines abgeschlossenen Systems (keine Reibung !) ist konstant!

1.3.1.5. Energieerhaltungssatz - Beispiele

a) schiefe Ebene, keine Reibung



$$E_{ges} = E_{kin}^{(1)} + E_{pot}^{(1)} = E_{kin}^{(2)} + E_{pot}^{(2)} = const$$

Ort 1: $$E_{pot}^{1} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_g \, d\vec{r} = \int_{z=0}^{z=h} mgdz = mgh$$

$$E_{kin}^{1} = \frac{m}{2} v^2 = 0$$

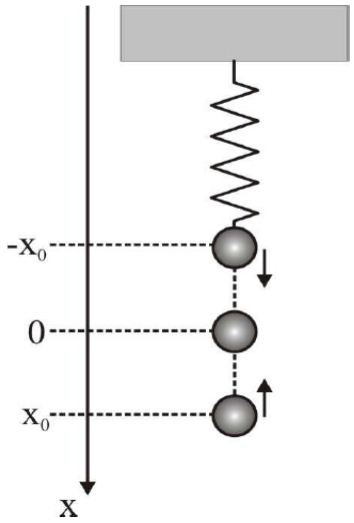
Ort 2: $$E_{pot}^{2} = 0 \qquad E_{kin}^{2} = \frac{m}{2} v^2$$

$$\rightarrow \quad E_{ges} = mhg + 0 = 0 + \frac{m}{2} v^2 = const$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

Exp.: schiefe Ebene, v = f(h)

b) Federschwinger, harmonische Schwingung, keine Reibung (Dämpfung)



$$x(t) = x_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0)$$

bei $x(t) = x_0$: $\quad E_{pot}^{x=x_0} = -\int_{x=0}^{x=x_0} F_R dx = -\int_{x=0}^{x=x_0} -Kx dx = K\frac{x_0^2}{2} \qquad E_{kin}^{x=x_0} = 0$

bei $x(t) = -x_0$: $\quad E_{pot}^{x=-x_0} = K\frac{x_0^2}{2} \qquad E_{kin}^{x=-x_0} = 0$

bei $x(t) = 0$: $\quad E_{pot}^{x=0} = 0 \qquad E_{kin}^{1} = \frac{m}{2} v(x=0)^2$

Gesamtenergie des harmonischen Oszillators:

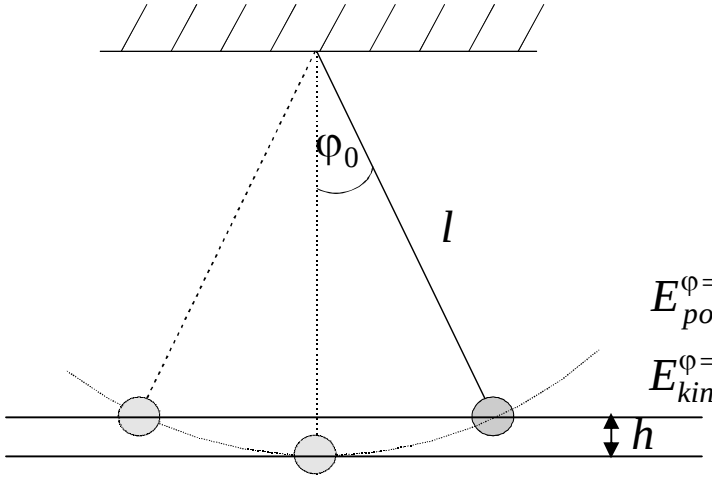
$$\boxed{E_{ges} = \frac{K}{2} x_0^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2} = \frac{m}{2} v(x=0)^2 \longrightarrow v(x=0) = \omega_0 x_0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Folgt auch für $\alpha_0 = 0$ aus:

$$v(t=0) = \dot{x}(t=0)$$
$$= x_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) = \omega_0 x_0$$

c) mathematisches Pendel, harmonische Schwingung, keine Reibung (Dämpfung)



$$E_{pot}^{\varphi=\varphi_0} = mgh = mgl(1-\cos\varphi_0) \overset{\varphi_0 << 1}{=} mgl\left(1-\left[1-\frac{\varphi_o^2}{2!}\right]\right) = mgl\frac{\varphi_o^2}{2}$$

$$E_{kin}^{\varphi=\varphi_0} = 0$$

$$E_{pot}^{\varphi=0} = 0$$

$$E_{kin}^{\varphi=0} = \frac{m}{2}v(\varphi=0)^2 = \frac{m}{2}gl\varphi_0^2 \qquad E_{ges} = \frac{m}{2}gl\varphi_0^2 = const$$

$$\varphi(t) = \varphi_0\sin(\omega_0 t)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(l\varphi)}{dt} = l\varphi_0\omega_0\cos(\omega_0 t)$$

$$v(\varphi=0) = l\varphi_0\omega_0 = l\varphi_0\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Exp.: Nagelpendel

1.3.2. Impulserhaltung

1.3.2.1. Impulserhaltungssatz

Exp.: Pendelstoß mit mehreren Kugeln

Modell „isoliertes System“: Summe aller Kräfte auf alle *N* Teilchen im System ist null, d. h. keine Kraft wirkt von außerhalb auf System! $\sum_i^N \vec{F}_i = 0$

$$\sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N \frac{d\left(m\vec{v}_i\right)}{dt} = \sum_i^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\sum_i^N \vec{p}_i = const}$$

Gesamtimpuls der Teilchen in einem abgeschlossenen System ist konstant!

In jeder Raumrichtung bleibt die Summe aller Impulse erhalten!

$$\sum_i^N p_{x,i} = const \qquad \sum_i^N p_{y,i} = const \qquad \sum_i^N p_{z,i} = const$$

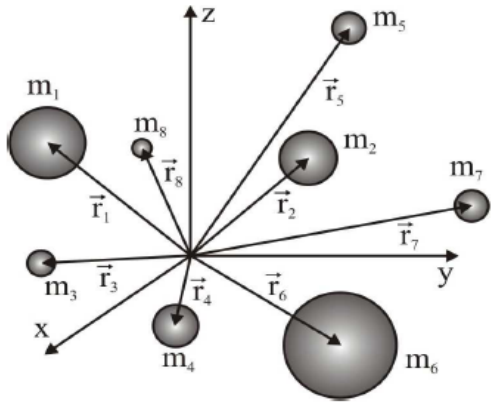
1.3.2.2. Schwerpunktsatz

Definition Schwerpunkt:

Schwerpunkt eines isolierten Systems ist der Massenmittelpunkt

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{\sum_i^N m_i} = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

isoliertes System



Geschwindigkeit des Schwerpunkts:

$$\vec{v}_S = \frac{d\vec{r}_S}{dt} = \frac{\sum_i^N \vec{p}_i}{M} = const$$

Schwerpunkt eines isolierten Systems ruht oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit

Impuls des Schwerpunkts:

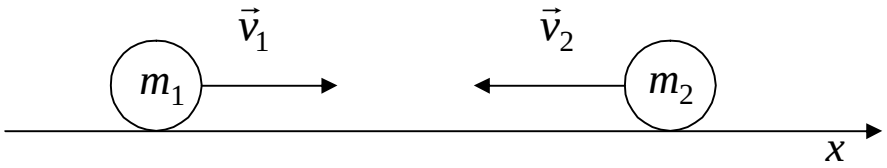
$$\vec{p}_S = M\vec{v}_S = \sum_i^N \vec{p}_i = const$$

Der Gesamtimpuls eines isolierten Systems entspricht dem Impuls des Schwerpunktes und ist konstant

Exp.: Impulserhaltung
(Impulswagen, Wasserrad, Rakete)

1.3.2.3. Stoßprozesse

1.3.2.3.1. Zentraler elastischer Stoß



Geschwindigkeiten vor Stoß:

$$\vec{v}_1 = (v_1,0,0) \qquad \vec{v}_2 = (v_2,0,0)$$

Geschwindigkeiten nach Stoß:

$$\vec{u}_1 = (u_1,0,0) \qquad \vec{u}_2 = (u_2,0,0)$$

Es gilt Impuls- und Energieerhaltung

Impulserhaltungssatz: $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Energieerhaltungssatz: $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$

Lösung für $v_2 = 0$
(m_2 ruht im Laborkoordinatensystem)

$$u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Beispiele zentraler elastischer Stoß: $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$ $u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

- $m_1 = m_2$, $v_2 = 0$, $v_1 > 0$ ⟶ $u_1 = 0$, $u_2 = v_1$

Exp.: Pendelstöße mit $m_1 = m_2$

- $m_1 < m_2$, $v_2 = 0$, $v_1 > 0$ ⟶ $u_1 < 0$, $0 < u_2 < v_1$

- $m_1 > m_2$, $v_2 = 0$, $v_1 > 0$ ⟶ $0 < u_1 < v_1$, $u_2 > v_1$

Exp.: Pendelstöße mit $m_1 \neq m_2$

- $m_2 = \infty$ $v_2 = 0$, $v_1 > 0$ ⟶ $u_1 = -v_1$, $u_2 = 0$ Reflektion an Wand

Exp.: Pendelstoß mit Amboss
Modell ideales Gas

Stoß von Gasmolekül mit Wand (Fläche *A*):

führt zu Kraft auf Wand $|F_x| = \left|\frac{\Delta p_x}{\Delta t}\right| = \left|\frac{2m_1 v_{1,x}}{\Delta t}\right|$

↓

Druck der Gasmoleküle auf Fläche *A* $p = \frac{N_x |F_x|}{A} = \frac{N m_1 v_{1,x}^2}{V}$

Impulsänderung: $\Delta p_x = m_1 u_{1,x} - m_1 v_{1,x} = -2\, m_1 v_{1,x}$

N Moleküle im Volumen *V* produzieren N_x Stöße pro Zeit Δt auf Fläche A: $N_x = \frac{N}{2} \frac{v_{1,x} \Delta t A}{V}$

1.3.2.3.2. Zentraler unelastischer Stoß

Energieerhaltungssatz gilt nicht, da Teil der mechanischen Energie in Wärme- und Deformationsenergie umgewandelt wird: $2\Delta E = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 - m_1 v_1^2 - m_2 v_2^2$

Exp.: Kugelfall auf Stahl, Messing, Blei

Es gilt nur Impulserhaltung

Impulserhaltungssatz: $\sum_i^N \vec{p}_i = const \longrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

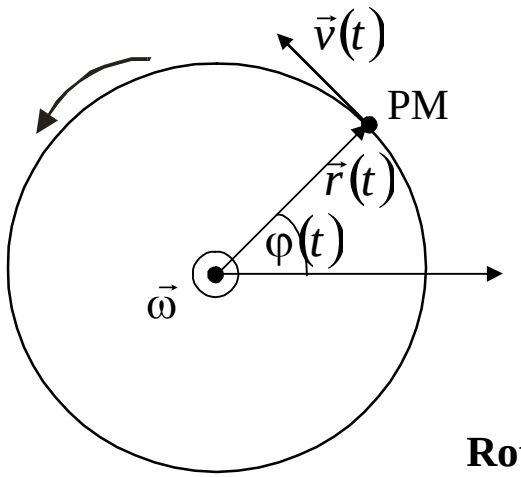
Bei einem perfekten unelastischen Stoß gilt: $u = u_1 = u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

Exp.: unelastische Stöße mit Sandsäcken
Crash Test (Video)

1.4. Drehbewegung und starrer Körper

1.4.1. Spezielle physikalische Größen der Drehbewegung

1.4.1.1. Kinetische Energie bei Drehbewegung - Rotationsenergie



Bahngeschwindigkeit:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad \vec{v} \perp \vec{\omega}, \vec{v} \perp \vec{r}$$

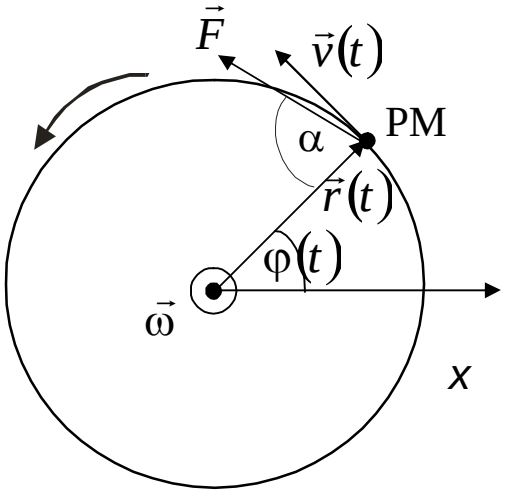
$$\vec{v}^2 = \vec{\omega}^2 \vec{r}^2$$

Rotationsenergie entspricht kinetische Energie bei Drehbewegung:

$$E_{kin} = E_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{\omega}^2 \vec{r}^2$$

1.4.1.2. Drehmoment und Drehbewegung



→ **Drehmoment** $\vec{T}$ als Maß für die Effektivität der angreifenden Kraft bzgl. der Drehbewegung

Exp.: Drehmoment und Drehtisch

→ $\left|\vec{T}\right| \propto F, \quad \left|\vec{T}\right| \propto r, \quad \left|\vec{T}\right| \propto \sin\alpha$

→ **Drehmoment** $\boxed{\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}}$ $[T]$ = Nm

$$\left|\vec{T}\right| = rF\sin\alpha$$

1.4.1.3. Drehimpuls und Drehimpulserhaltungssatz

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \text{aber} \qquad \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{T} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

→ **Drehimpuls** $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$ $[L] = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$

→ **Allg. Bewegungsgleichung für Drehbewegung** $\boxed{\vec{T} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

Drehimpulserhaltungssatz:

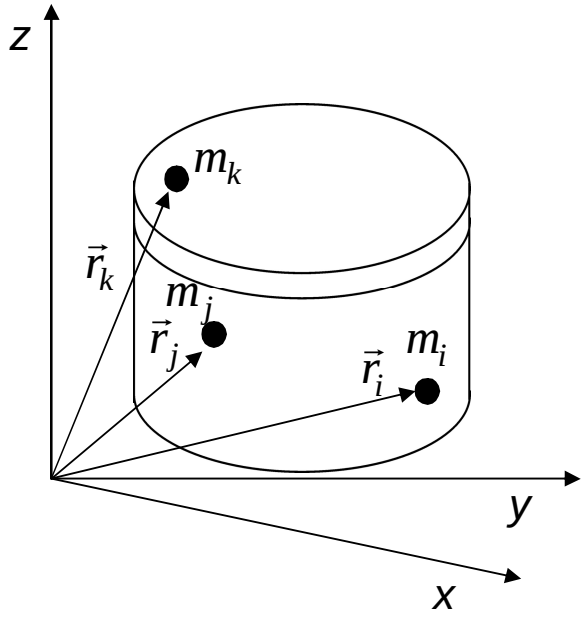
→ $\vec{T} = 0$ → $\vec{L} = const$ **Wenn das angreifende äußere Drehmoment null ist, bleibt der Drehimpuls erhalten**

Bsp.: Zentralkraft, $\vec{F} \parallel \vec{r}$ Gravitationskraft, Planetenbewegung

Coulombkraft, Elektron im H-Atom (Bohr‘s Atommodell)

1.4.2. Mechanik des starren Körpers

1.4.2.1. Model starrer Körper



Modell: aufgebaut aus PM m_i oder Massenelementen dm mit festen Abständen untereinander $\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = const$

und Gesamtmasse $M = \sum_i^N m_i$

bzw. $M = \iiint_V \rho(\vec{r})dV$

mit $dm = \rho(\vec{r})dV$

$\rho(\vec{r})$ - Dichte

V -Volumen

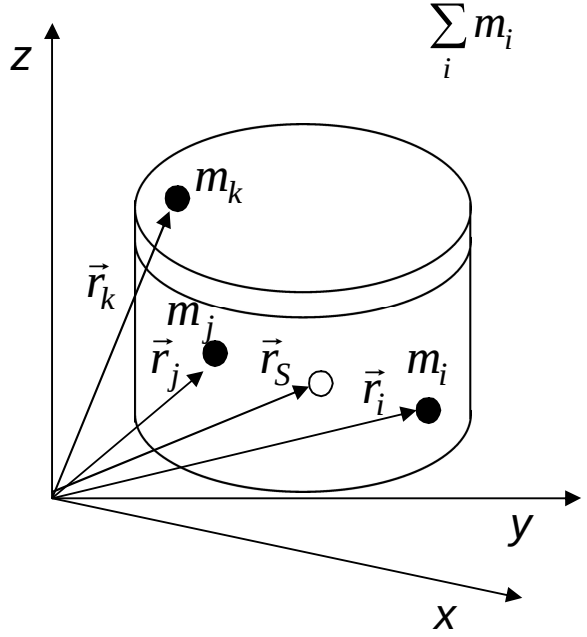
Schwerpunkt:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{\sum_i^N m_i} = \frac{\sum_i^N m_i \vec{r}_i}{M}$$

bzw. für homogenen Körper: $\left(\rho(\vec{r}) = const = \frac{M}{V} \right)$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \iiint_M \vec{r}\, dm = \frac{1}{M} \iiint_V \vec{r}\, \rho(\vec{r})\, dV \qquad dm = \rho(\vec{r})\, dV$$

$$\vec{r}_S = \frac{1}{V} \iiint_V \vec{r}\, dV$$



Exp.: Drehmomentkörper Doppelkegel

Bewegung des Schwerpunkts:

(vgl. mit Schwerpunktsatz in 1.3.2.2.)

$$M \frac{d\vec{r}_S}{dt} = M\vec{v}_S = \vec{p}_S \longrightarrow M \frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2} = \frac{d\vec{p}_S}{dt} = \vec{F}_G$$

Schwerpunkt bewegt sich wie PM mit Masse M unter Einfluss einer äußeren Gesamtkraft $\vec{F}_G$

→ **Allg. Bewegung des starren Körpers setzt sich zusammen aus Translationsbewegung des Schwerpunkts und Rotationsbewegung um eine Achse durch den Schwerpunkt**

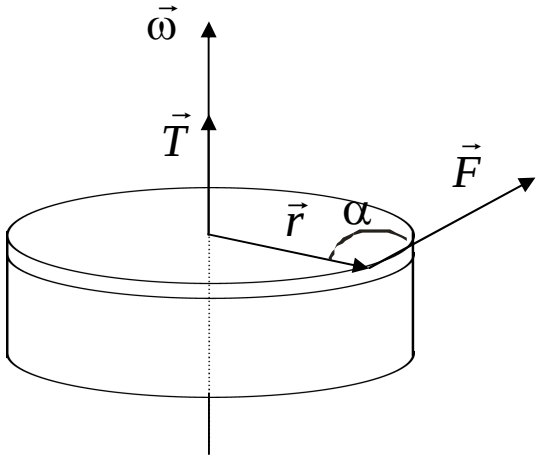
1.4.2.2. Rotationsbewegung des starren Körpers

Idee:

- Verallgemeinerung der für die einzelne PM abgeleiten Gesetze für die Drehbewegung durch Aufsummation für alle PM m_i bzw. Massenelement *dm* des starren Körpers

- Rotationsachse geht durch Schwerpunkt entlang einer Symmetrieachse des starren Körpers

1.4.2.2.1. Drehmoment



Drehmoment $\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$

$$\left|\vec{T}\right| = rF\sin\alpha$$

Exp.: folgsame Rollle

Gleichgewichtsbedingung $\sum_i \vec{T}_i = 0$

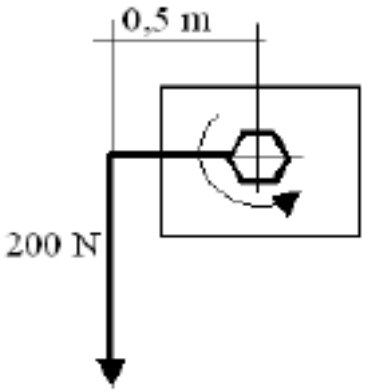
Summe aller angreifenden Drehmomente ist Null

Exp.: Schwerpunkt Besen
Hebel

Torque and Wrenches

wrench

torque is controlled by
length of wrench and force
you are applying



Exp.: Video Reifenwechsel

torque wrench

torque is controlled or
measured
by internal mechanism
(mechanical or electronic)

1.4.2.2.2. Rotationsenergie und Trägheitsmoment

PM

$$E_{rot} = \frac{1}{2} m \vec{\omega}^2 \vec{r}^2$$

Starrer Körper PM, Aufsummation aller PM bzw. Massenelemente

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{\omega}^2 \vec{r}_i^2$$

$\vec{\omega} = const$ für alle m_i, da starrer Körper

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_M r^2 dm$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} \omega^2 I$$

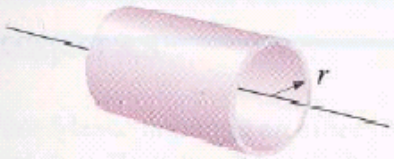
mit **Trägheitsmoment**

$$I = \iiint_M r^2 dm$$

$[I]$ = kg m^2

Trägheitsmomente

Zylindermantel;
Drehachse = Körperachse

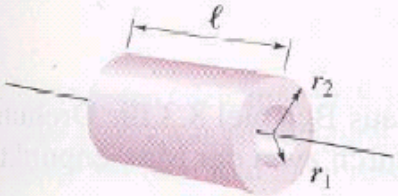


$I = m_{ges} r^2$

Massiver Zylinder;
Drehachse = Körperachse

$I = \frac{1}{2} m_{ges} r^2$

Hohlzylinder;
Drehachse = Körperachse



$I = \frac{1}{2} m_{ges} (r_1^2 + r_2^2)$

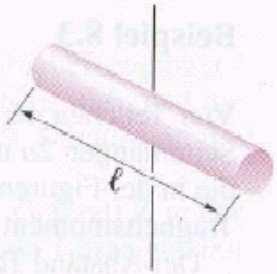
Zylindermantel;
Drehachse durch Mittelpunkt ⊥ Körperachse

$I = \frac{1}{2} m_{ges} r^2 + \frac{1}{12} m_{ges} \ell^2$

Massiver Zylinder;
Drehachse durch Mittelpunkt ⊥ Körperachse

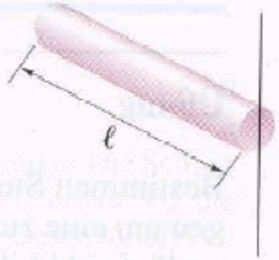
$I = \frac{1}{4} m_{ges} r^2 + \frac{1}{12} m_{ges} \ell^2$

Dünner Stab;
Drehachse durch Mittelpunkt ⊥ Körperachse



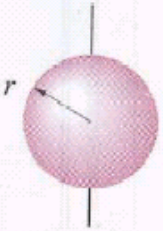
$I = \frac{1}{12} m_{ges} \ell^2$

Dünner Stab;
Drehachse durch ein Ende ⊥ Körperachse



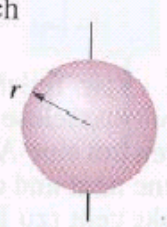
$I = \frac{1}{3} m_{ges} \ell^2$

Dünne Kugelschale;
Drehachse durch Mittelpunkt



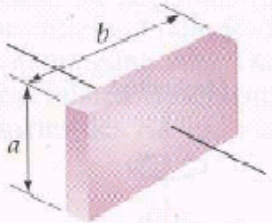
$I = \frac{2}{3} m_{ges} r^2$

Massive Kugel;
Drehachse durch Mittelpunkt



$I = \frac{2}{5} m_{ges} r^2$

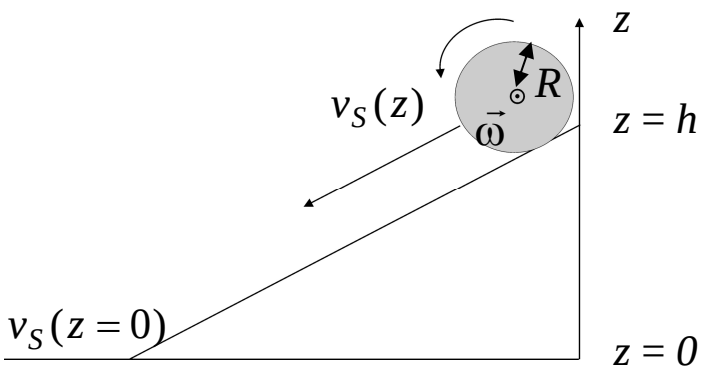
Massiver Quader;
Drehachse durch Mittelpunkt ⊥ Oberfläche



$I = \frac{1}{12} m_{ges} (a^2 + b^2)$

Anwendung: Zylinder auf schiefer Ebene

Vollzylinder: $I_V = \frac{1}{2} MR^2$ Zylindermantel: $I_M = MR^2$



Energieerhaltungssatz: $v_s(z=h)=0$ $v_s(z=0)=v_s$

$$E_{ges} = E_{pot}(z=h) = E_{kin,ges}(z=0) = E_{kin,v_s}(z=0) + E_{rot}$$

$$E_{pot}(z=h) = E_{kin,v_s}(z=0) + E_{rot}(z=0)$$

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_s^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

E_{kin} des Schwerpunkts

E_{rot} des starren Körpers

Rollen ohne Rutschen: $v_S = \omega R$

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv_s^2 + \frac{1}{2} I \frac{v_s^2}{R^2}$$

$$\rightarrow \quad v_S = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + \frac{I}{R^2}}}$$

Vollzylinder Zylindermantel

$$v_{S,V} = \sqrt{\frac{4}{3} gh} \quad > \quad v_{S,M} = \sqrt{gh}$$

Exp.: Zylinder auf schiefer Ebene

1.4.2.2.3. Drehimpuls

PM $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$

Starrer Körper PM, Aufsummation aller PM bzw. Massenelemente

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,2} \vec{\omega}$$

→

$$\vec{L} = \vec{\omega} \iiint_M r^2 dm$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

→

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I\vec{\omega}^2 = \frac{\vec{L}^2}{2I}$$

Bewegungsgleichung:

→

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T} \qquad I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{T}$$

Drehimpulserhaltung:

→

$$\vec{T} = 0 \longrightarrow \vec{L} = const$$

Exp.: Drehstuhl und Drehimpulserhaltung

Translation		**Rotation**	
position: position vector $\vec{r}(t)$		**orientation:** rotational axis and angle $\vec{\varphi}(t)$	
velocity:	$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	**angular velocity:**	$\vec{\omega} = \dot{\vec{\varphi}}$
acceleration:	$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	**angular acceleration:**	$\dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\varphi}}$
mass:	m	**moment of inertia:**	$I, I_{kl}, \underline{\underline{I}}$ (in general 6 different quantities if asymmetric arrangement of mass, tensor) $I = \int r^2 dm$
momentums: ($\vec{p}$ and $\vec{v}$ parallel)	$\vec{p} = m\vec{v}$	**angular momentum:** (in general $\vec{L}$ and $\vec{\omega}$ are pointing in different orientations given by tensor $\underline{\underline{I}}$)	$\vec{L} = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{\omega}$
force:	$\vec{F}$	**torque:**	$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F}$
equation of motion:	$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$	**equation of motion::**	$\dot{\vec{L}} = \vec{T}$
conservation of momentum:	$\dot{\vec{p}} = 0$ if $\vec{F} = 0 = \sum_i \vec{F}_i^{ex}$	**conservation of angular momentum**	$\dot{\vec{L}} = 0$ if $\vec{T} = 0 = \sum_i \vec{T}_i$
$\sum \vec{F}_i^{ex}$ - external force		$\vec{T}_i$ - torque resulting from $\vec{F}_i^{ex}$	
kinetic energy:	$W_{kin} = \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \frac{1}{2}\vec{v}\vec{p}$	**kinetic energy:**	$W_{kin} = \frac{I}{2}\vec{\omega}^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L}$

1.4.2.2.4. Anwendung – Rotationsspektrum zweiatomiger Moleküle

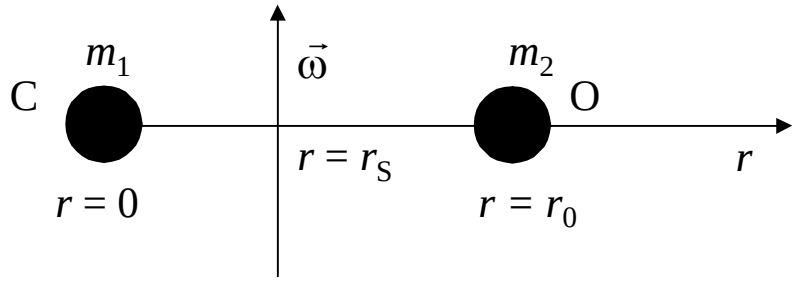
Bsp.: CO, NO, H_2, O_2, …

Exp.: Rotation um freie Achsen (Quader, Zylinder)

Modell starrer Rotator: konstante Bindungslänge r_0

Rotationsachse durch Schwerpunkt

a) Trägheitsmoment



Schwerpunkt:

$$r_S = \frac{\sum_i^N m_i r_i}{\sum_i^N m_i} = \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}$$

$$r_S = \frac{m_2 r_0}{m_1 + m_2}$$

$$I = m_1 r_S^2 + m_2 (r_0 - r_S)^2 \quad \rightarrow \quad I = r_0^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = r_0^2 \mu$$

reduzierte Masse: $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Bsp.:	$^{12}C^{16}O$	$^{13}C^{16}O$
	$r_0 = 0.115$ nm	$= 0.115$ nm
	$I = 15.05 \cdot 10^{-47}$ kg m^2	$= 15.74 \cdot 10^{-47}$ kg m^2

b) Rotationsenergie

$$E_{rot} = \frac{\vec{L}^2}{2I} \qquad \text{mit} \quad I = r_0^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = r_0^2 \mu$$

Quantenmechanik: $L^2 = \hbar^2 J(J+1)$ mit Drehimpulsquantenzahl $J = 0, 1, 2, \ldots$

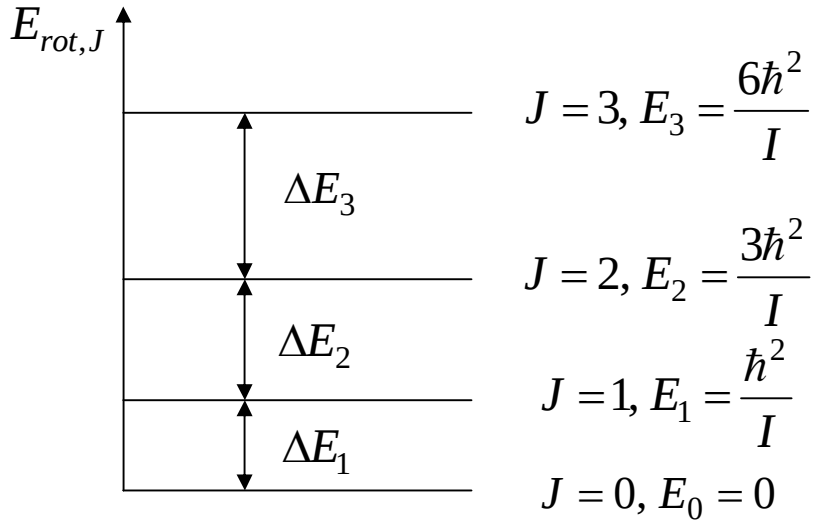
(Quantisierung des Drehimpulses)

$$\rightarrow \quad E_{rot,J} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1)$$

$$\Delta E_J = E_{J+1} - E_J$$

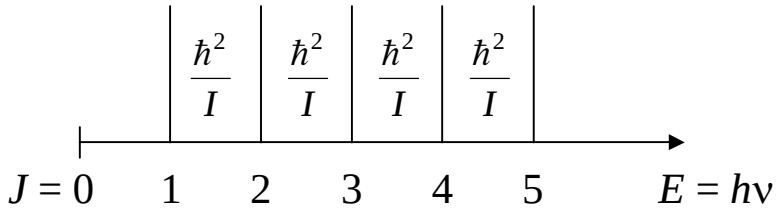
$$= \frac{\hbar^2}{2I}\left[(J+1)(J+2) - J(J+1)\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{I}(J+1)$$



c) Rotationsspektrum:

äquidistante Linien



$\rightarrow$ aus Linienabstand $\frac{\hbar^2}{I}$

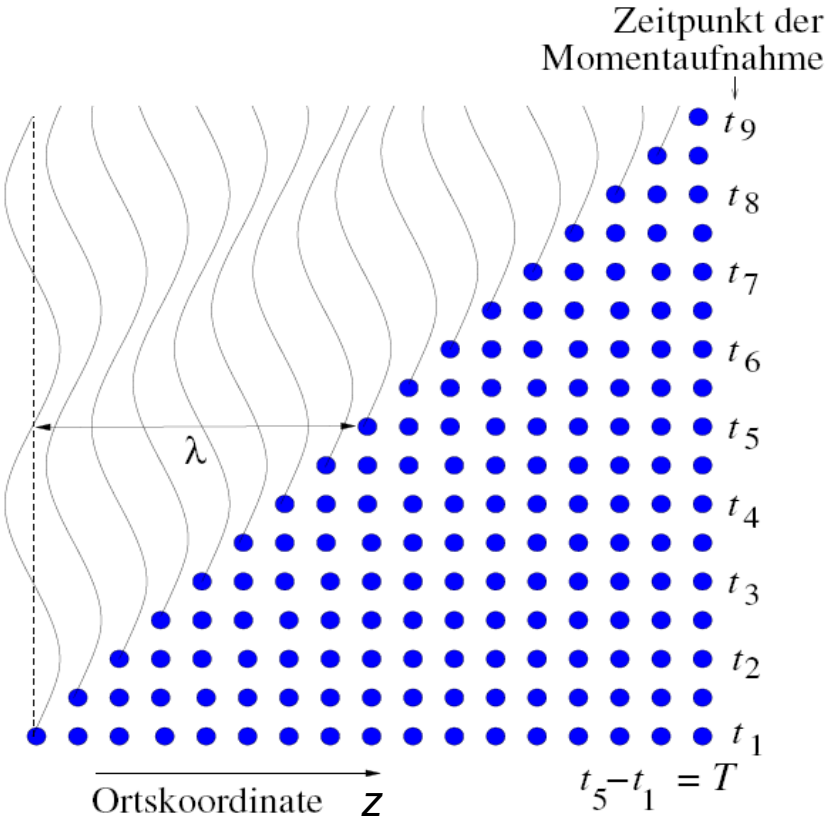
Bestimmung von I und r_0

Frequenzbereich: ν = 2 GHz – 2 THz

1.5. Wellen

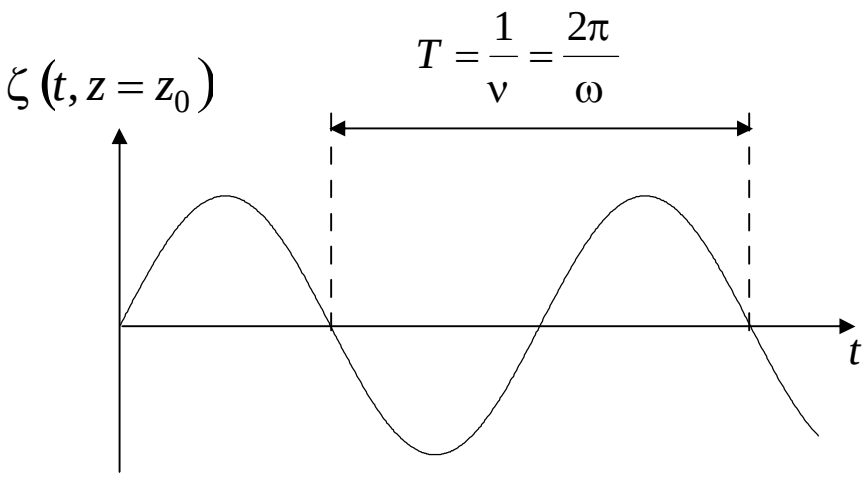
Exp.: gekoppelter Oszillator

Eine Welle ist eine periodische Änderung einer physikalischen Größe, z. Bsp. Auslenkung $\vec{\zeta}(t,\vec{r})$ einer PM gegenüber ihrer Gleichgewichtslage, in Zeit und Raum.

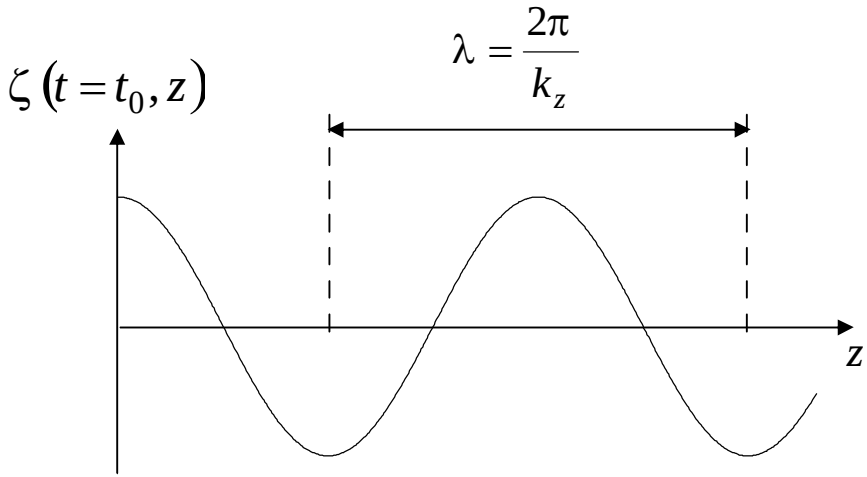


1.5.1. Longitudinale eindimensionale harmonische Welle

Ausbreitungsrichtung: +z



Auslenkung in ±z Richtung



Wellenfunktion:
(Weg-Zeit-Gesetz)

$$\vec{\zeta}(t, z) = A\vec{e}_z \sin(\omega t - k_z z)$$

A - Amplitude

$\omega t - k_z z$ - Phase der Welle

λ - Wellenlänge $[\lambda] = \mathrm{m}$

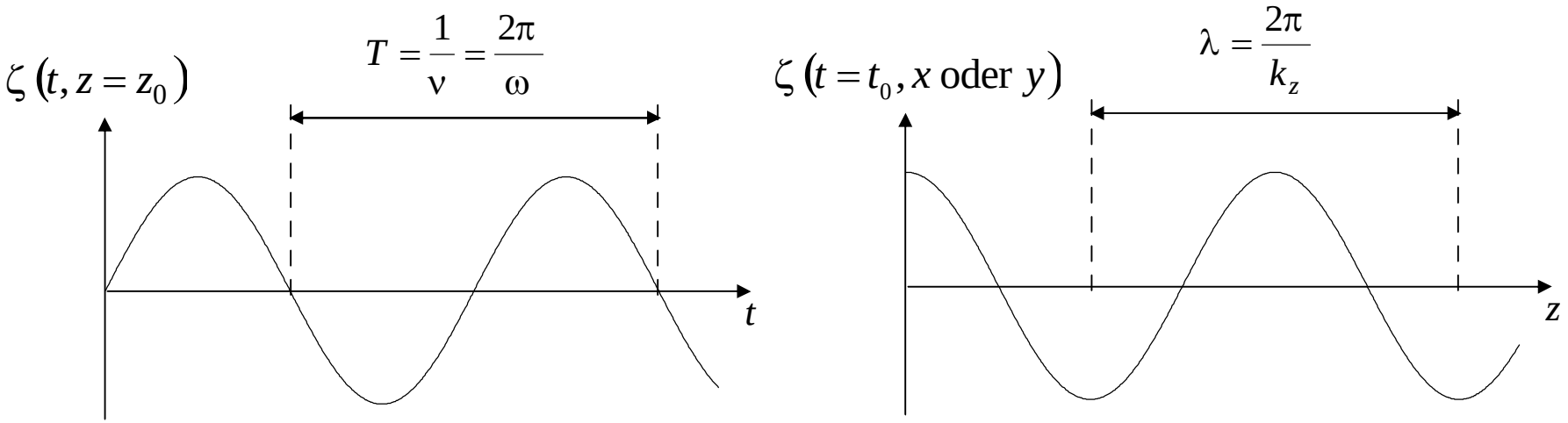
$k_z = \frac{2\pi}{\lambda}$ - Wellenzahl $[k_z] = \mathrm{m}^{-1}$

Exp.: longitudinale Welle auf Spiralfeder

1.5.2. Transversale eindimensionale harmonische Welle

Ausbreitungsrichtung: $+z$

Auslenkung in $\pm x$ oder $\pm y$ Richtung



Wellenfunktion:
(Weg-Zeit-Gesetz)

$$\vec{\zeta}(t,z) = A\vec{e}_{x,y}\sin(\omega t - k_z z)$$

Exp.: transversale Wellen auf Wellenmaschine
Wellenmodell

Wellengleichung:
(Bewegungsgleichung)

$$\frac{\partial^2\vec{\zeta}(t,z)}{\partial t^2} - v_{ph}^2\frac{\partial^2\vec{\zeta}(t,z)}{\partial z^2} = 0$$

v_{ph} - Phasengeschwindigkeit

1.5.3. Phasengeschwindigkeit

Phasengeschwindigkeit – Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle

genauer, Geschwindigkeit mir der sich eine spezielle Phase, z. Bsp. ein Maximum der Wellenfunktion bewegt $\omega t - k_z z$

Bedingung: $\omega t - k_z z = const$

$$\frac{d}{dt}(\omega t - k_z z) = 0$$

$$\omega - k_z \frac{dz}{dt} = 0 \qquad \text{mit} \quad \frac{dz}{dt} = v_{ph}$$

$$\omega - k_z v_{ph} = 0$$

Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k_z} = \nu\lambda$$

Explizite Formel für Phasengeschwindigkeit hängt vom speziellen Typ der Welle und Medium in dem sich die Welle ausbreitet ab!

1.5.3. Beispiele für Wellentypen und Phasengeschwindigkeit

a) Seilwellen Transversalwellen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{F}{m} l}$$

F – Zugkraft im Seil

m – Masse des Seils

l – Länge des Seils

Exp.: Seilwelle

b) Elastische Wellen in Festkörpern

Longitudinalwellen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

E – Elastizitätsmodul

ρ – Dichte

Transversalwellen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

G – Schub- bzw. Torsionsmodul

Exp.: Simulation von Wellen im Festkörper
Phasengeschwindigkeit einer Longitudinalwelle in Al-Stab

c) Schallwellen in Gasen

Longitudinalwellen

$$v_{ph} = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$$

p – Druck

ρ – Dichte

κ – Adiabatenkoeffizient

Exp.: Simulation von Schallwelle

1.5.4. Überlagerung von Wellen

1.5.4.1. Stehende von Wellen

Superposition zweier Wellen gleicher Frequenz und Wellenzahl aber entgegengesetzter Ausbreitungsrichtung

Welle in +z Richtung: $\zeta_1 = A\sin(\omega t - k_z z)$

Welle in -z Richtung: $\zeta_2 = A\sin(\omega t + k_z z - \varphi)$ φ - Phasenunterschied

Superposition: $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = A[\sin(\omega t - k_z z) + \sin(\omega t + k_z z - \varphi)]$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{\zeta = 2A\cos\left(k_z z - \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

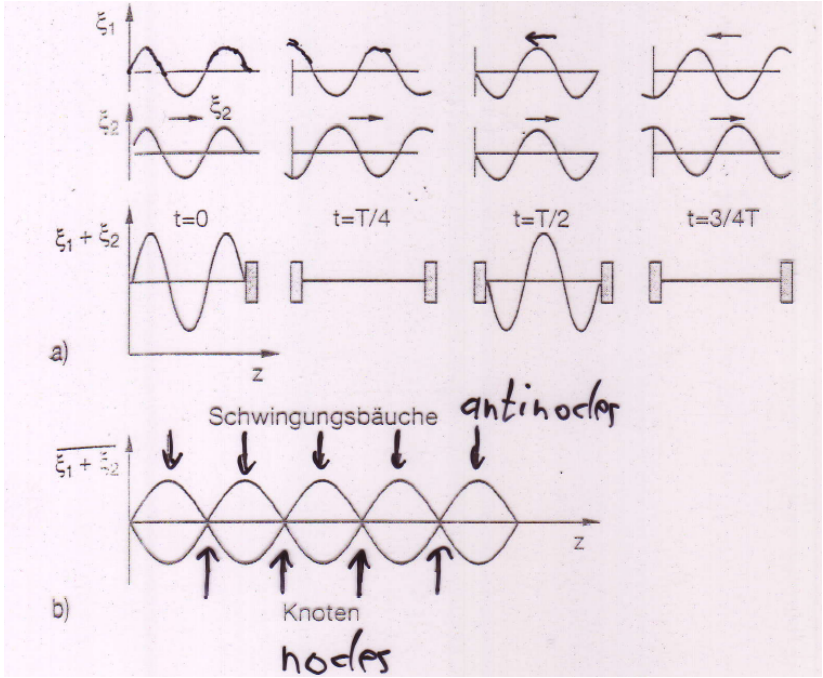
⟶ Schwingung $\sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$ mit ortsabhängiger Amplitude $2A\cos\left(k_z z - \frac{\varphi}{2}\right)$

Diskussion:

$$\zeta = 2A\cos\left(k_z z - \frac{\varphi}{2}\right)\sin\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Amplitude oszilliert zwischen
$-A$ und $+A$ mit Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$



Schwingungsknoten: $\cos\left(k_z z - \frac{\varphi}{2}\right) = 0$ ⟶ $k_z z - \frac{\varphi}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

⟶ $z = \frac{1}{k_z}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right] = \frac{\lambda}{4\pi}\left[(2n+1)\pi + \varphi\right]$

Schwingungsbäuche: $\cos\left(k_z z - \frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1$ ⟶ $k_z z - \frac{\varphi}{2} = n\pi$

⟶ $z = \frac{1}{k_z}\left(n\pi + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\lambda}{4\pi}(2n\pi + \varphi)$

Anwendung: Resonatoren, LASER

Exp.: stehende Wellen

Reflektion am freien und festen Ende (Simulation)

Seilwelle

Wellenmaschine

stehende Welle im Hörsaal

1.5.4.2. Interferenz von Wellen

Superposition zweier Wellen gleicher Frequenz, gleicher Wellenzahl und gleicher Ausbreitungsrichtung aber konstanter Phasendifferenz φ = const

$$\zeta_1 = A\sin\left(\omega t - k_z z + \frac{\varphi}{2}\right) \qquad \zeta_2 = A\sin\left(\omega t - k_z z - \frac{\varphi}{2}\right)$$

Superposition: $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\boxed{\zeta = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\sin(\omega t - k_z z)}$$

Amplitude ist abhängig von Phasendifferenz φ

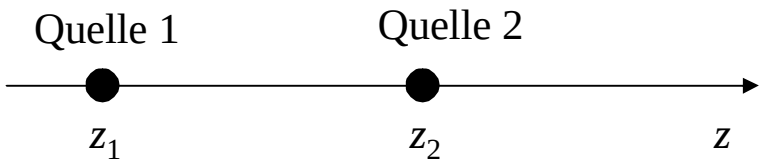
destruktive Interferenz: (Auslöschung)

$$\zeta = 0 \longrightarrow \cos\frac{\varphi}{2} = 0 \longrightarrow \varphi = \pm(2n+1)\pi$$

konstruktive Interferenz: (Verstärkung)

$$\zeta = 2|A| \longrightarrow \left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| = 1 \longrightarrow \varphi = \pm 2n\pi$$

betrachte Phasendifferenz φ als Gangunterschied $\Delta z = z_2 - z_1$

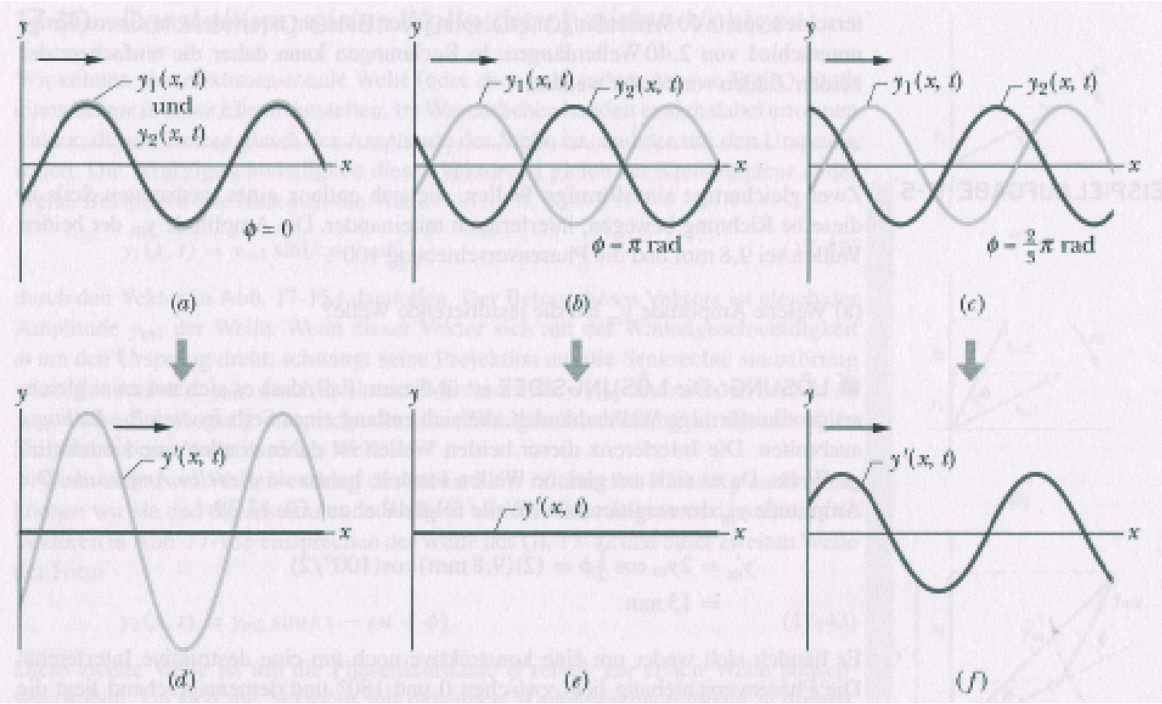


$$\varphi = k_z \Delta z$$

$\rightarrow$ Gangunterschied: $\Delta z = \frac{\lambda}{2\pi}\varphi$

destruktive Interferenz: $\Delta z = \pm\frac{\lambda}{2}(2n+1)$ $\left(\varphi = \pm(2n+1)\pi\right)$
(Auslöschung)

konstruktive Interferenz: $\Delta z = \pm n\lambda$ $\left(\varphi = \pm 2n\pi\right)$
(Verstärkung)



Anwendung: Lichtbeugung,
Röntgenbeugung,
Elektronen- und
Neutronenbeugung

Exp.: Interferenz von Wasserwellen
(Simulation)
Interferenz von Schallwellen