Der **Schluss**

$P_1, \dots, P_n \rightarrow K$

ist **gültig** gdw. gilt: Falls die Prämissen $P_1, \dots, P_n$ wahr sind, dann muß auch die Konklusion K wahr sein.

Ein Schluss ist **formal gültig** gdw. jeder Schluss von der gleichen Form gültig ist.

Beispiel für gültigen, aber nicht formal gültigen Schluss:

(1)	Eva ist Frau von Adam	F(e,a)
(2)	Adam ist Mann von Eva	M(a,e)

Formal gültig wäre hingegen:

(1)	F(e,a)	A
(2)	Wenn F(e,a), dann M(a,e)	$A \supset B$
(3)	M(a,e)	B

Weitere formal gültige Schlüsse:

(1) Alle Katzen sind musikalisch
(2) Mima ist eine Katze
(3) Mima ist musikalisch

(1) Alle Menschen sind unsterblich
(2) Sokrates ist ein Mensch
(3) Sokrates ist unsterblich

P1 Alle S sind P
P2 a ist ein S
K a ist ein P

Gleiche Form? Das ist eine **syntaktische** Frage! Präzisierung im Rahmen spezieller **künstlicher (logischer) Sprachen**. Der Witz der künstlichen (logischen) Sprachen ist: Sie sind extra so konstruiert, dass bei ihnen –im Unterschied zur Umgangssprache – **Syntax und Semantik** voll korrelieren.

Logisch wahre Sätze (Tautologien) sind Spezialfälle von analytisch wahren Sätzen: Sie sind wahr allein aufgrund der Bedeutung der in ihnen vorkommenden **logischen Konstanten**. Logisch falsche Sätze heißen auch **Kontradiktionen**.

Beispiele für **logische Konstanten** (logische Operatoren):

Aussagenlogik:	non-A	$\neg A$
	A und B	$A \wedge B$
	A oder B	$A \vee B$
	Wenn A, dann B	$A \supset B$
	A gdw. B	$A \equiv B$
Prädikatenlogik:	Für alle x gilt: F(x):	$\Lambda x F(x)$
	Für mindestens ein x gilt: F(x)	$V x F(x)$
Modallogik:	A ist notwendig	NA
	A ist möglich	MA
	Kontingent	KA

Wahrheitstafeln

A	$\neg A$
w	f
f	w

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \supset B$	$A \equiv B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w

A	B	A / B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f	f	f
w	f	f	f	w	f
f	w	f	w	f	f
f	f	w	w	w	w

Vollständig: $\neg$, $\wedge$

$A \vee B := \neg(\neg A \wedge \neg B)$

$A \supset B := \neg(A \wedge \neg B)$

Vollständig: $\neg$, $\supset$

$A \wedge B := \neg(A \supset \neg B)$

$A \text{ v } B := \neg A \supset B$

Vollständig: $\neg$,$\vee$

$A \wedge B := \neg(\neg A \vee \neg B)$

$A \supset B := \neg A \vee B$

Vollständig: /

$\neg A := A/A$

$A \wedge B := (A/A) / (B/B)$

$A \equiv B := (A \supset B) \wedge (B \supset A)$
m.a.W.: $A \equiv B$ gdw. A für B sowohl **hinreichend** als auch **notwendig** ist.- Man beachte: $(B \supset A)$ gdw. $(\neg A \supset \neg B)$

Tautologien & Kontradiktionen

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$	$A \supset A$
w	f	w	w
f	w	w	w

A	B	$(A \vee B) \equiv (\neg A \supset B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	w

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$	$A \equiv \neg A$
w	f	f	f
f	w	f	f

A	B	$(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
w	w	f
w	f	f
f	w	f
f	f	f

-

Bedeutungsanalyse vs. Explikation

Bei einer **Begriffsanalyse** hat das Analysandum bereits eine wohlbestimmte Bedeutung – und die Definition sagt, dass sie mit der Bedeutung des Analysans (des analysierenden Prädikats) zusammenfällt. („Junggeselle" bedeutet im Deutschen dasselbe wie „unverheirateter Mann".)

Begriffsexplikationen hingegen sind keine Beschreibungen eines schon bestehenden Sprachgebrauchs, sondern **Präzisierungen**, d.h. von diesem Gebrauch u.U. auch teilweise abweichende Festsetzungen.

Vgl. zum Beispiel das umgangssprachliche „Wenn-dann" mit der folgenden Definition der Implikation:

A	B	$A \supset B$
w	w	w
w	f	f
f	**w**	**w**
f	**f**	**w**

Logiken

Extensionale	**Intensionale / Modale i.w.S.**
Aussagen-L	Modallogik i.e.S.
Prädikaten-L	doxastische / epistemische L
(+ Identität)	Präferenz- / Wollens-L
	Bewirkens-L

Mehrwertige L
Freie L
Relevanz-L
Fuzzy-L
parakonsistente L
nicht-assertorische L

	Extension (Bezug)	**Intension** (Sinn)
GK	Gegenstand	Individual-Begriff
Prädikat	Umfang	Begriff
Satz	*Wahrheitswerte (w/f)*	Wahrheitsbedingungen

Der einfachste Fall: Aussagen-Logik

Erster Einstieg:

- Semantik der Satzoperatoren: Wahrheitstafeln (einstellige, zweistellige, n-stellige)
- Alle definierbar durch: $\neg$, $\wedge$ bzw. $\neg$, v bzw. $\neg$, $\supset$ bzw. / (Sheffer-Strich)
- Aussagenlogische Wahrheit
- Entscheidungsverfahren

Allgemein: Aufbau eines logischen Systems in 3 Schritten:

1: Syntax: Formulierung der Sprache, die dem System zugrunde liegt
2. Semantik: Definition einer Interpretation der Sprache
3. Axiomatisierung & Beweisbegriff: Festlegung der Menge der Theoreme des Systems

Notwendig: **Adäquatheitsnachweis** – d.h. Nachweis, dass die beweisbaren Sätze (Theoreme) **genau** die Logisch wahren Sätze umfassen:

Widerspruchsfreiheit: Theoreme umfassen **nur** logische Wahrheiten.

Vollständigkeit: Theoreme umfassen **alle** logischen Wahrheiten.

Die Aussagenlogik als axiomatisierte Theorie

Ein axiomatisiertes System besteht aus einer Liste von **Axiomen** und aus **Regeln**, die besagen, wie man aus diesen Axiomen die **Theoreme** der Theorie gewinnen kann.

Bei nicht-logischen Theorien (Theorien, die nicht selbst Theorien des logischen Schließens sind) enthalten die Axiome somit den **gesamten materialen Gehalt** der Theorie.

Axiomatisierte Systeme galten schon für Aristoteles als ideale Form wissenschaftlicher Theorien.

Antinomien

1) Tarski-Antinomie

Definition: Ein Satz der Form

(S) Alle Sätze haben die Eigenschaft F

ist **selbstanwendbar** gdw. S die Eigenschaft F hat.

Nun: Ist (S') selbstanwendbar?

(S') Alle Sätze sind nicht-selbstanwendbar

(S') ist selbstanwendbar gdw. (S') nicht-selbstanwendbar ist. #

2) Die Antinomie von Russell:

r := {x: ¬ (x ε x)}

Folgerung: (r ε r) gdw. ¬ (r ε r)
#

Zur Vermeidung solcher Antinomien notwendig :
Trennung von Theorie und Metatheorie

m.a.W.:

Eine vollständige (auch ihre Metatheorie einschließende) Logik-Theorie ist widerspruchsfrei nicht möglich.

Erkenntnistheoretische Anwendung:

Es gibt **für uns** keine vollständige Theorie **unserer** Erkenntnis.