

## 1.6 Kraft auf eine bewegte Ladung (Wiederholung)

- Kraft  $F = dp/dt$ ; Teilchen-System  $S'$ : Teilchen in Ruhe; andere Ladungen bewegen sich, Kraft auf die ruhende Ladung  $Q$ :  $F = E' \cdot Q$ .

$\implies$  in  $S'$  beobachtbare Impulsänderung (Kraft), die in das System  $S$  zurücktransformiert werden muss.

$\implies$  Es lässt sich zeigen (spezielle Relativitätstheorie), dass

$$\frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} \quad \text{und} \quad \frac{dp_{\perp}}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{dp'_{\perp}}{dt'} \quad \text{mit} \quad E'_{\parallel} = E_{\parallel} \quad \text{usw.}$$

$$\implies F = \frac{dp'_{\parallel}}{dt'} = E'_{\parallel} \cdot Q = E \cdot Q \quad \text{in } S'$$

$$\implies F = \frac{dp_{\parallel}}{dt} = \frac{dp'}{dt'} = E_{\parallel} \cdot Q \quad \text{in } S$$

Es stellt sich die Frage nach den Transversalkomponenten des Feldes in  $S$ :  $E_{\perp}$ . Die Transformation lautet  $E'_{\perp} = \gamma \cdot E_{\perp}$ , so dass  $dp'/dt' = QE'_{\perp} = Q\gamma E_{\perp}$ . Die Rücktransformation nach  $S$ :  $dp_{\perp}/dt = 1/\gamma \cdot \gamma QE_{\perp} = QE_{\perp}$ .

$\implies$  Unabhängig von der Teilchengeschwindigkeit ist  $F$  das  $Q$ -fache des elektrischen Feldes! (Empirisch bestätigtes Gesetz! Direkte Folge der Ladungsinvarianz!)

## 1.7 Wechselwirkungen bewegter Ladungen auf andere bewegte Ladungen

- Ampère: Hypothese permanenter Kreisströme in einer magnetischen Substanz  $\implies$  Formulierung der Äquivalenz zwischen magnetisierbarer Materie und permanenten Strömen.
- Magnetische Effekte: beruhen auf 1) Gültigkeit der Postulate der Relativitätstheorie, 2) invarianter Ladung, 3) Coulombsches Gesetz.
- Laborsystem für „Strom“: positive und negative Ladungsreihen bewegen sich dicht gepackt, ohne Störung aneinander vorbei. (Es gibt kein Bezugssystem, in dem alle Ladungen ruhen, Linienladungsdichte  $\lambda_{\pm}$ , Gesamtladung Null,  $E = 0$  ( $\approx$  ungeladener „Draht“, in dem ein stationärer elektrischer Strom fließt).  
 $\implies$  Ruhende Ladung  $Q$ : keine Kraft.

Was passiert, wenn die Ladung  $Q$  in Bewegung ist?

- a) Laborsystem ( $E = 0$ ).
- b) Teilchensystem (Teilchen ruht,  $E' \neq 0$ )  
 $\implies$  Wie kommt das Feld  $E'$  zustande?

Absolutbeiträge der Linienladungsdichten sind nicht gleich, „Draht“ ist von diesem System aus gesehen geladen!

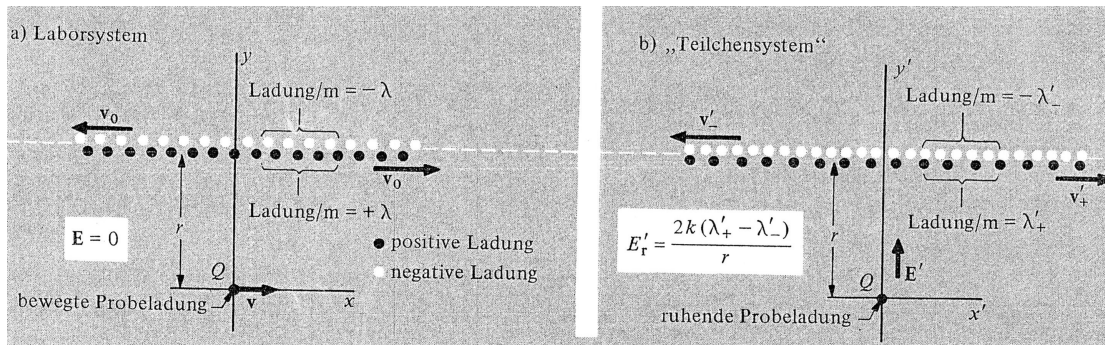


Abbildung 1: Linienförmige Anordnung positiver und negativer bewegter Ladungen werden in zwei verschiedenen Bezugssystemen beobachtet. a) Die negativen Ladungen bewegen sich nach links, die positiven nach rechts, ihre Geschwindigkeitsbeträge sind im Laborsystem gleich, ebenso die Linienladungsdichten. b) Im „Teilchen“-System ruht die Probeladung  $Q$ ; die Linienladungsdichten sind in diesem Bezugssystem voneinander verschieden.

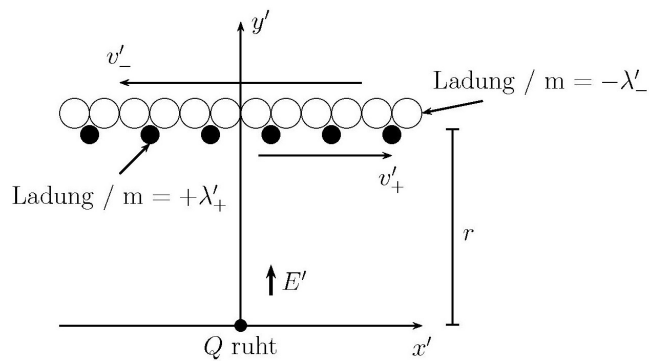


Abbildung 2: Kraft auf bewegte Ladungen.

**Ableitung:**

Aus den relativistischen Gleichungen für die Geschwindigkeitsaddition folgt

$$v'_+ = \frac{v_0 - v}{1 - v_0 \cdot v/c^2} \quad v'_- = \frac{v_0 + v}{1 + v_0 \cdot v/c^2} \quad (v - \text{von } Q; \quad v_0 - \text{im „Draht“})$$

oder:

$$\beta'_+ = \frac{\beta_0 - \beta}{1 - \beta_0 \cdot \beta} \quad \beta'_- = \frac{\beta_0 + \beta}{1 + \beta_0 \cdot \beta} \quad \left( \beta_0 = \frac{v_0}{c}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_0^2}} \quad \text{etc.} \right)$$

Linienladungsdichte ist gegenüber der Dichte im Ruhesystem der positiven / negativen Ladungen erhöht: Kontraktionsfaktor  $1/\gamma'_+$

$$\Rightarrow \quad \lambda'_+ = \gamma'_+ \frac{\lambda}{\gamma_0} \quad \text{und} \quad \lambda'_- = \gamma'_- \frac{\lambda}{\gamma_0}$$

Umstellen, Substitution erbringt für

$$\lambda'_+ - \lambda'_- = -\frac{2\lambda\gamma v v_0}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad E' = \frac{2k(\lambda'_+ - \lambda'_-)}{r} = -\frac{4k\lambda\gamma v v_0}{rc^2}$$

$$\Rightarrow \quad F'_y = \frac{4kQ\gamma v v_0}{rc^2}$$

Im Laborsystem:

$$F = \frac{4kQv v_0}{rc^2} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{2kQvI}{rc^2}$$

Beachte: Die Kraft auf die Probeladung  $Q$  ist radial nach innen gerichtet!

**Fazit: Transformation und Rücktransformation zur Beschreibung der Bewegungen von Ladungen ist langwierig!  $\Rightarrow$  Kurz und prägnant durch hinführung eines neuen Feldes, des Magnetfeldes möglich!**

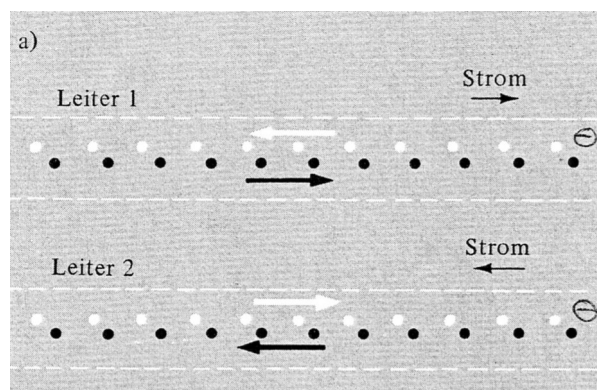


Abbildung 3: Laborsystem. Zwei parallele Leiter führen Ströme in entgegengesetzten Richtungen. Die Ströme rühren von positiven und negativen Ionen her, die sich mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, wie z. B. in einer Elektrolytlösung.

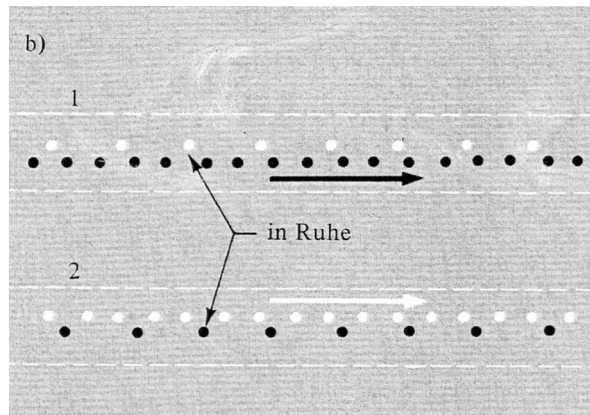


Abbildung 4: Bezugssystem, in dem die negativen Ionen des Leiters 1 und die positiven Ionen des Leiters 2 ruhen. Leiter 1 hat einen überschuss an positiver Ladung und stößt die positiven Ladungen an Leiter 2 ab. Leiter 2 wiederum hat einen überschuss an negativen Ladungen und stößt die negativen Ladungen in Leiter 1 ab.

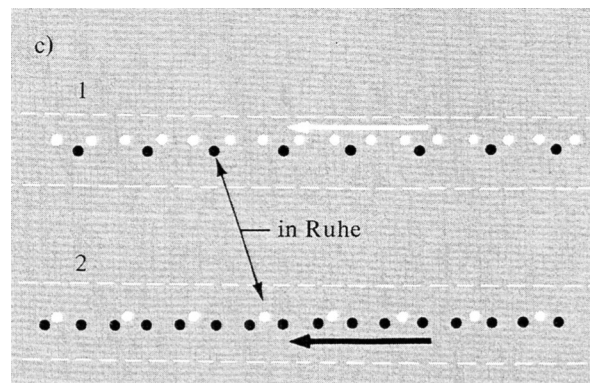


Abbildung 5: Bezugssystem, in dem die positiven Ionen des Leiters 1 (überschuss an neg. Ladungen) und die negativen Ionen des Leiters 2 (überschuss an pos. Ladungen) ruhen. Genauer Betrag im Laborsystem  $\Rightarrow$  Rücktransformation  $\Rightarrow$  ähnlich in Drähten, wo die positive Ladungskette ruht.  $\Rightarrow$  Bezugssystem, in dem die Elektronenkette ruht  $\Rightarrow$  Abstoßung von stromdurchflossenen Leitern!

## 2 Das Magnetische Feld

### 2.1 Definition

Letzte Vorlesung:

**Kraft auf bewegte Ladung:**

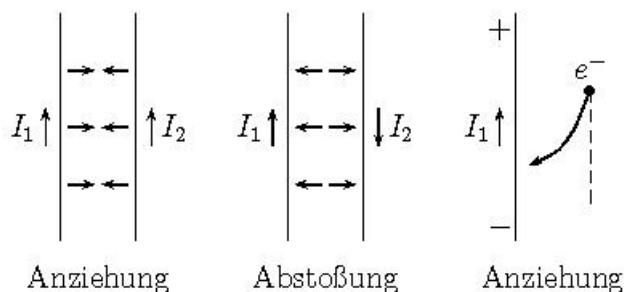


Abbildung 6: Kraft auf bewegte Ladungen.

$$Q = \epsilon_0 \int_{A(t)} \vec{E} \cdot dA = \epsilon_0 \int_{A'(t')} \vec{E}' \cdot dA'$$

„Wenn die Postulate der Relativitätstheorie gültig sind, die Ladung invariant ist und das Coulombsche Gesetz sich bewährt, müssen jene Effekte auftreten, die wir gemeinhin als magnetische bezeichnen. Sie treten immer dann in Erscheinung, wenn wir die elektr. WW zwischen einer bewegten Ladung und anderen bewegten Ladungen untersuchen.“

⇒ Magnetische Felder zusätzlich zu elektr. Feldern

⇒ Zusätzliche Kraft auf Ladung!

**Lorentzkraft:**

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E} + Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

$\vec{E}$ : elektrisches Feld

$\vec{B}$ : magnetisches Feld (magnetische Flußdichte)

$[B] = 1 \text{ T (Tesla)}$

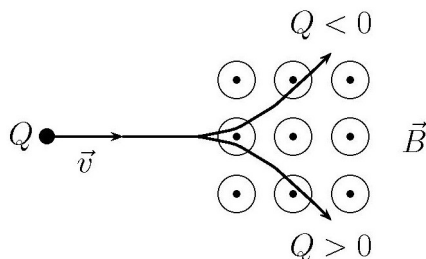


Abbildung 7: Veranschaulichung zur Lorentzkraft.

### Letzte Stunde:

$$F = \frac{2kQvI}{rc^2} \quad F = QvB \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad \implies \quad B = \frac{2kI}{rc^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{r}$$

$\implies$  magnetische Feldkonstante:

$$\mu_0 = \frac{4\pi k}{c^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

### Kraft zwischen zwei Leitern:

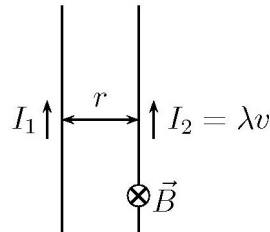


Abbildung 8: Kraft zwischen zwei Leitern.

$$F = \frac{2kI_1\lambda v_2}{rc^2} = \frac{2kI_1I_2}{rc^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1I_2}{r}$$

$\implies$  Die Kraft, die zwischen 2 parallelen Drähten im Abstand  $r = 1$  m, die vom gleichen Strom von  $1$  A durchflossen werden, beträgt  $2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{m}}$ .  $\implies$  Magnetische Kräfte sind schwach!

Kraft zwischen den Strömen durch das magn. Feld ausgedrückt:

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times d\vec{B} = Idt \frac{d\vec{l}}{dt} \times \vec{B} = dQ \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Magnetfelder werdend durch bewegte Ladungen erzeugt!

$$B [T] = 2 \cdot 10^{-7} \left[ \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \right] \cdot \frac{I [\text{A}]}{r [\text{m}]}$$

Die magnetische Feldstärke beträgt  $B = 1$  T, wenn ein 1 m, in dem der Strom  $I = 1$  A senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes fließt, die Kraft  $F = 1$  N erfährt.

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G (Gauß)}$$

Beispiele:

- Magnetfeld an der Erdoberfläche:  $5 \cdot 10^{-5}$  T
- Eisenmagnet: 1 bis 2 T
- supraleitende Magneten: 6 bis 8 T

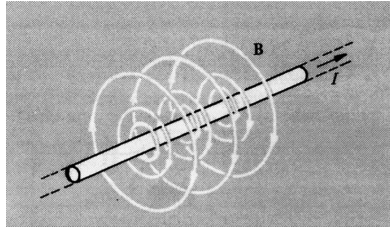


Abbildung 9: Magnetische Feldlinien um einen geraden stromführenden Draht. Es gilt die Rechte-Hand-Regel, der Abfall der Magnetfeldstärke ist  $\frac{1}{r}$ .

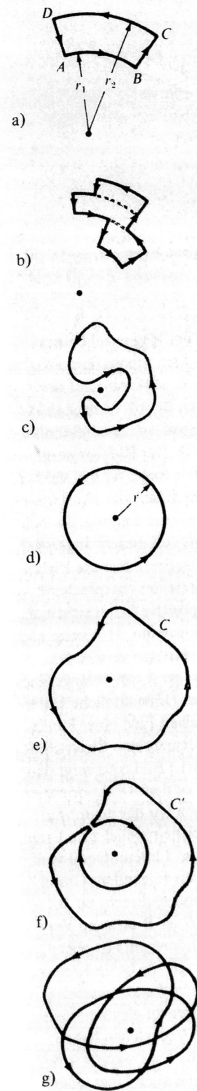


Abbildung 10: Das Linienintegral der magnetischen Induktion  $\oint \vec{B} d\vec{s}$  um irgendeinen geschlossenen Weg hängt nur von dem umschlossenen Strom ab. a) Weg in der senkrecht auf dem Draht stehenden Ebene: da  $\int_A^B \vec{B} d\vec{s} = -\int_C^D \vec{B} d\vec{s}$  und  $\int_B^C \vec{B} d\vec{s} = \int_D^A \vec{B} d\vec{s} = 0$  gilt  $\oint \vec{B} d\vec{s} = 0$ . b) Aus Radialsegmenten und Kreisbögen zusammengesetzter Weg. c) Weg der den Draht nicht umschließt ( $\oint \vec{B} d\vec{s} = 0$ ). d) Kreisförmiger Weg, der den Draht umschließt:  $\oint \vec{B} d\vec{s} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I$ . e) Beliebiger Weg um den Draht. f) Aus einem kreisförmigen und einem beliebigen Teil zusammengesetzter Weg, der den Draht *nicht* umschließt. g) Schleife aus  $N$  Windungen, die den Draht umschließt:  $\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \cdot N$ .

## 2.2 Eigenschaften des Magnetfeldes

Allgemeine stationäre Stromverteilung wird durch eine räumliche Stromdichte  $\vec{j}(x, y, z)$  beschrieben. Bei zeitunabhängigen Strömen gelten:

- Kontinuitätsgleichung
- Ladungserhaltung  $\text{div}\vec{j} = 0$

$$\oint_{\text{aufgespannte Fläche}} \text{rot}\vec{B}d\vec{A} = \oint_{\text{Kurve C}} \vec{B}d\vec{s} = \oint_{\text{aufgespannte Fläche}} \vec{I}d\vec{A}$$

$$\Rightarrow \text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

$\Rightarrow$  Allgemeinste Formulierung der Beziehung zwischen Magnetfeld und bewegten Ladungen.

Zur völligen Bestimmung von  $\vec{B}$  eine weitere Beziehung:

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

Es lässt sich nämlich nirgendwo eine kleine Schachtel zeichnen, auch wenn sie den Draht umschließt, die einen nach innen oder außen führenden Gesamtfluß besitzt.

$$\text{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} \quad \text{div}\vec{B} = 0 \quad \text{div}\vec{E} = \rho/\epsilon \quad \text{rot}\vec{E} = 0$$

## 2.3 Vektorpotential

### Elektrisches Feld

$$\vec{E} = -\text{grad}U$$

$$U(x, y, z) = k \cdot \int \frac{\rho(x_2, y_2, z_2)}{r_{1,2}} dV_2$$

$\vec{B}$  kann nicht Gradient eines skalaren Potentials sein.

Anstelle das Vektorpotential  $\vec{A}$ :

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

$$\Rightarrow \text{rot}(\text{rot}\vec{A}) = \mu_0\vec{j}$$

$$(\text{rot}\vec{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \mu_0 j_x$$

Durch Umordnen und Nulladdition von  $0 = \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$  auf der linken Seite erhält man:

$$\underbrace{-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}}_{\text{neg. Laplaceoperator}} + \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right)}_{\text{wähle div}\vec{A}=0} = \mu_0 j_x$$



$$\Rightarrow A_x = (x_1, y_1, z_1) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{j}_x(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}} dV_2$$

analog für  $y$  und  $z$ :

$$\Rightarrow \vec{A}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{j}(x_2, y_2, z_2)}{r_{12}} dV_2$$

**Beispiel:** Langer, gerader Leiter mit Strom  $I$

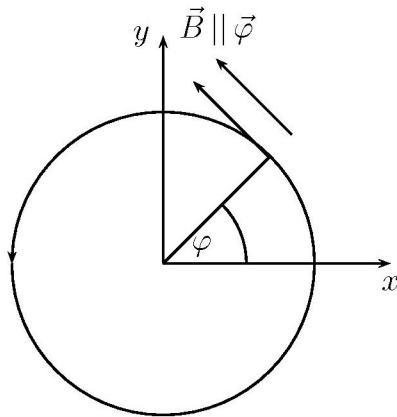


Abbildung 11: Das Magnetfeld um einen langen, gerade Draht.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{\varphi} \quad \vec{\varphi} - \text{Einheitsvektor } \vec{\varphi} \parallel \vec{B}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{-\sin \varphi \vec{x} + \cos \varphi \vec{y}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{-y\vec{x} + x\vec{y}}{x^2 + y^2}$$

Das Integral oben läßt sich nicht lösen, also raten:

$$\vec{A} = -\vec{z} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln(x^2 + y^2)$$