Universität Leipzig, Fakultät für Physik und Geowissenschaften
Vorlesung zur Experimentalphysik III
Wintersemester 2008/2009
Prof. Dr. Josef A. Käs
Vorlesungsmitschrift zur Vorlesung vom 30.10.2008

4.3 Universelles Induktionsgesetz

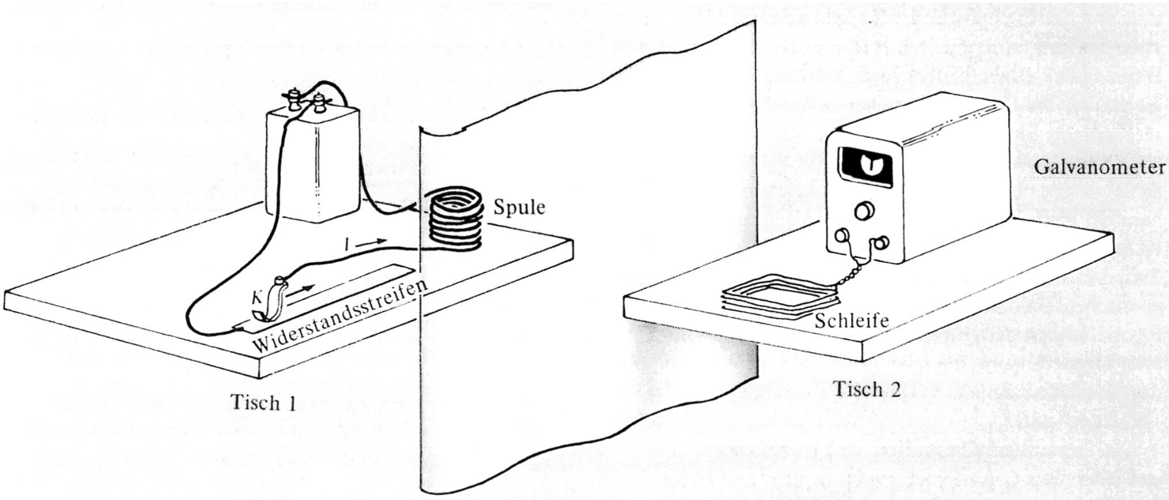

Abbildung 1: Um den Fluss zu ändern, kann man einen der beiden Tische bewegen oder bei festgehaltenen Tischen den Strom langsam ändern.

Führe folgende Experimente durch:

a) Spule 1 befindet sich in Ruhe während Spule 2 sich mit der Geschwindigkeit v_1 von Spule 1 entfernt. Aufgrund dieser Bewegung spürt Spule 2 ein schwächer werdendes Magnetfeld und eine Induktionsspannung U_i wird induziert.

b) Spule 2 befindet sich in Ruhe während Spule 1 sich mit der Geschwindigkeit $v_2 = -v_1$ bewegt. Aufgrund der Lorenzinvarianz bleibt U_I unverändert.

c) Beide Spulen befinden sich in Ruhe: $v_1 = v_2 = 0$. Der Strom I von Spule 1 wird so herunterreguliert, dass die Magnetfeldänderung am Ort der zweiten Spule der von a) und b) entspricht. Da die Induktionsspannung U_i nur von der Magnetfeldänderung abhängt, bleibt diese weiterhin unverändert.

$$U = \int_c \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \int_A \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_{c\to 0} \vec{E}\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cdot \int_{A\to 0} \vec{B}\mathrm{d}\vec{A}$$

mit:

$$\mathrm{rot}\vec{F} \cdot \vec{n} = \lim_{A_i \to 0} \frac{\int_{c_i} \vec{F}\mathrm{d}\vec{s}}{A_i}$$

erhält man für obige Gleichung:

$$\vec{A} \cdot \text{rot}\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right) = \vec{A}\left(-\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

gegenseitige Induktion:

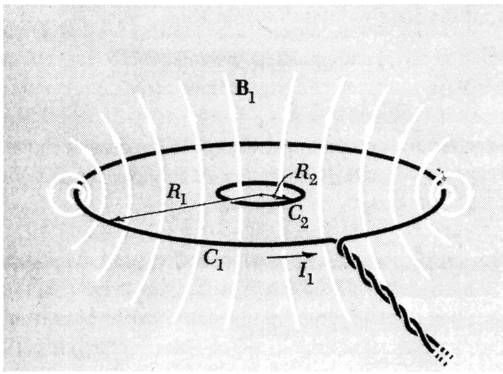

Abbildung 2: Der in dem Ring C_1 fließende Stom I_1 erzeugt ein Feld $\vec{B}_1$, das auf der Fläche des kleinen Ringes C_2 annähernd homogen ist.

$$\Phi_{21} = \int_{A_2} \vec{B}\mathrm{d}\vec{A} = M_{21} I_1$$

mit M_{21} Gegeninduktivität.

$$U_{21} = -M_{21} \cdot \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{H} \cdot 1\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} \qquad \Longrightarrow \qquad 1\,\mathrm{Henry} = 1\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{A}}$$

in Mitte: $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2R_1}$

$$\Rightarrow \qquad \Phi_{21} = \pi R_2^2 \frac{\mu_0 I_1}{2R_1} = \frac{\mu_0 \pi}{2} \cdot \frac{I_1 R_2^2}{R_1}$$

$$U_{21} = -\frac{\mu_0 \pi}{2} \cdot \frac{R_2^2}{r_1} \cdot \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad \Rightarrow \qquad M_{21} = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-7} R_2^2}{R_1}$$

Erweiterung:

C_1 N_1 Windungen

C_2 N_2 Windungen

$$M_{21} = \frac{1}{R_1} \cdot 2\pi^2 \cdot 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2$$

„Reziprozitäts“-Satz:

$$M_{21} = M_{12} = \frac{1}{R_1} \cdot 2\pi^2 \cdot 10^{-7} N_1 N_2 R_2^2$$

Selbstinduktion:

$$U_{11} = -\frac{1}{C} \cdot \frac{\mathrm{d}\Phi_{11}}{\mathrm{d}t} = L_1 \cdot \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

L - Selbstinduktivität

4.4 Stromkreis mit einer Selbstinduktivität

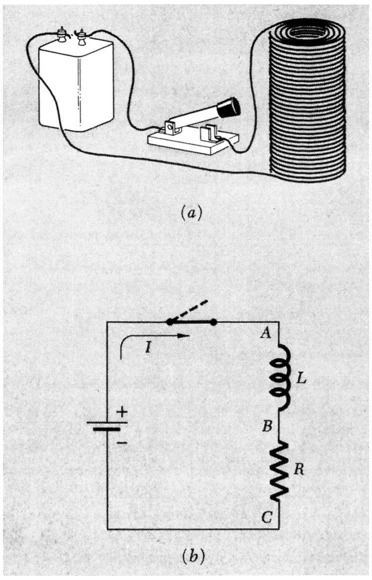

Abbildung 3: Einfacher Stromkreis mit einer Induktivität L und einem Widerstand R.

$$U_0 - L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = RI \qquad \Longrightarrow \qquad RI + L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} - U_0 = 0$$

$$I\left(t = 0\right) = 0$$

$$I\left(t \rightarrow \infty\right) = I_0$$

Einschalten:

$$\Longrightarrow I\left(t\right) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Ausschalten: zum Zeitpunkt t_1

$$RI + L \cdot \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

$$\Longrightarrow I\left(t\right) = I_0 \cdot e^{-\frac{R}{L}(t - t_1)}$$

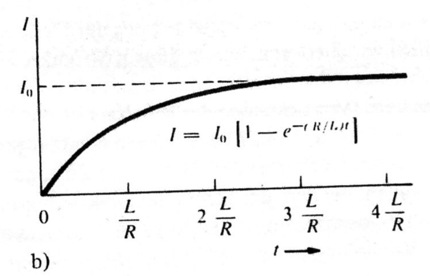

Abbildung 4: Vollständige Wiedergabe der zeitlichen Änderung des Stromes beim Schließen des Schalters beim Stromkreis aus Abbildung 3.

4.5 Energie eines Magnetfeldes

Siehe Stromkreis oben:

$$\mathrm{d}W = RI^2\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \qquad E_{ges} = \int_{t_1}^{\infty} RI^2\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{\infty} RI_0^2 e^{-\frac{2R}{L}(t-t_1)}\mathrm{d}t$$

$$E_{ges} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

$\Longrightarrow$ gespeicherte magnetische Feldenergie

E-Feld im Kondensator:

$$E = \frac{1}{2}CU^2$$

E-Feld:

$$E = \frac{\epsilon_0}{2}\vec{E}^2\mathrm{d}V$$

Spule:

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi}N^2 h \ln\frac{b}{a}$$

a: Innendurchmesser b: Aussendurchmesser h: Höhe der Spule

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}$$

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\mathrm{d}V = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}\right)^2 2\pi r h\mathrm{d}r = \frac{\mu_0}{4\pi}N^2 h I^2 \ln\frac{b}{a} = \frac{1}{2}LI^2 = E_{ges}$$

Allgemein:

$$E_{ges} = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\text{ges. Feld}} B^2\mathrm{d}V$$

4.6 Elektromagnetische Felder

$$E\text{ - Feld} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Elementarladung}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

elektr. Ladung in Bewegung $\Rightarrow$ Strom
Kontinuitätsgleichung:

$$\mathrm{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$\vec{j}$ stationär:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{I}$$

aber zeitabhängige Ladung, d.h.: $\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{div}\vec{j} \neq 0$$

aber:

$$\mathrm{div}\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\left(\mathrm{rot}\vec{B}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + (?)$$

$$\Longrightarrow \qquad \text{Term fehlt}$$

Induktion:
$\Longrightarrow$ verändertes Magnetfeld wird von einem elektrischen Feld begleitet:

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial(c\vec{B})}{\partial t}$$

Dies ist eine Beziehung, die das elektr. Feld und das Magnetfeld verbindet, auch im leeren Raum, wo keine Ladungen betroffen sind.
Es muss auch gelten:
änderndes elektr. Feld führt zu einem magn. Feld:

$$\mathrm{rot}(c\vec{B}) = \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{I} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Verschiebungsstrom $\vec{I}_d$:

$$\mathrm{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{I} + \vec{I}_d\right)$$

$$\vec{I}_d = \frac{1}{\mu_0 c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$\Longrightarrow$ neue Induktionserscheinung:
Ein sich veränderndes elektr. Feld wird von einem Magnetfeld begleitet.
bisher:
Magnetfeld $\vec{B}$ ist bestimmt durch das Gesetz von Biot-Savart.
Was ist mit Verschiebungsstrom $\vec{I}_d$?
$\vec{I}_d$ ist bei sich genügend langsam verändernden Feldern vernachlässigbar klein.
$\Longrightarrow$ Solche Felder bezeichnen wir als quasistatisch.