Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 1

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben werden am 11.04. in der Übung besprochen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

Motivation:

In der ersten Aufgabe sollen Sie durch die Berechnung von Fourier-Transformationen Vertrautheit mit dem mathematischen Formalismus der Quatenmechanik gewinnen. Die zweite Aufgabe ist einem eindimensionalen Randwertproblem gewidmet.

1. Fourier-Transformation

0+0 Punkte

(a) Geben Sie die Fourierdarstellung der mit Periode $2a$ periodischen Funktion $f(x)$ an. Im Intervall $[-a, a]$ ist $f(x)$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2b} & , -b \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Führen Sie die Fouriersumme im Limes $a \to \infty$ in ein Fourierintegral über. Was wird aus dem Fourier-Integral im Limes $b \to 0$?

(b) Die Fourier-Transformation bildet Funktionen $f(x)$ auf andere Funktionen $\tilde{f}(k)$ ab. Die Definition der Fourier-Transformierten einer Funktion $f(x)$ lautet

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{ikx} \ .$$

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ .$$

Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen der Funktion f und ihrer Fourier-Transformierten. Bestimmen Sie die Varianzen der Funktionen f^2 und $(\tilde{f})^2$. Welche Aussage können Sie über das Produkt der Varianzen treffen?

2. Teilchen im Kasten

0+0 Punkte

(a) Ein eindimensionales quantenmechanisches Teilchen, das in einem Kasten mit unendlich hohen Wänden (bei $x = 0$ und $x = L$) eingesperrt ist, wird durch die Differentialgleichung (Schrödingergleichung)

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} + k^2 u(x) = 0 \ ,$$

mit $k \in \mathbb{R}$, $x \in [0, L]$ und den Randbedingungen

$$u(0) = 0$$
$$u(L) = 0$$

beschrieben. Für welche Werte von k besitzt dieses (Sturmsche) Randwertproblem nichttriviale Lösungen? Geben Sie für diese k-Werte jeweils alle Lösungen an.

(b) Für welche k-Werte besitzt dieselbe Differentialgleichung nichttriviale Lösungen zu den periodischen Randbedingungen

$$u(0) = u(L)$$
$$u'(0) = u'(L)$$

Geben Sie für diese k-Werte wieder aIle Lösungen an. (Hinweis: Komplexwertige Lösungen $u(x)$ sind erlaubt.)