Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 2

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 22.04., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 25.04., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe wiederholen wir elementare Methoden der linearen Algebra. Beispielhaft sollen die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix bestimmt werden und eine Matrixmultiplikation ausgeführt werden. In den letzten beiden Aufgaben wird der Umgang mit linearen Differentialoperatoren geübt.

3. Symmetrische 3×3 Matrix *4+2 Punkte*

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der symmetrischen 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(b) Normieren Sie die Eigenvektoren und bestimmen Sie die Matrix V mit den normierten Eigenvektoren als Spalten. Berechnen Sie das Matrixprodukt $V^{\mathrm{T}}AV$.

Hinweis: Die Determinante einer 3×3 Matrix lautet

$$\det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} = m_{11} \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} - m_{21} \begin{pmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} + m_{31} \begin{pmatrix} m_{12} & m_{13} \\ m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} ,$$

wobei die Determinate einer 2×2 Matrix gegeben ist durch

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc .$$

4. Adjungierter Operator *3 Punkte*

Bestimmen Sie den adjungierten Operator $\overline{\mathcal{L}}$ der folgenden linearen Differentialoperatoren zweiter Ordnung

(a)

$$\mathcal{L} = x\frac{d^2}{dx^2} + (1-x)\frac{d}{dx} ,$$

(b)

$$\mathcal{L} = x\frac{d^2}{dx^2} + 2\frac{d}{dx} + 3x - 1 \ ,$$

(c)

$$\mathcal{L} = 2\frac{d^2}{dx^2} + 4x\frac{d}{dx} + 3e^x \ .$$

5. Sturm-Liouville Form

4 Punkte

Jede lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung lässt sich in Sturm-Liouville Form

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x) = \lambda\rho u(x)$$

bringen, wobei $p(x)$, $q(x)$ und ρ bis auf einen von Null verschiedenen Vorfaktor eindeutig bestimmt sind. Bringen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Sturm-Liouville Form

(a)

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + 2\frac{d}{dx}u(x) + xu(x) = 0 \ ,$$

(b)

$$\frac{d^2}{dx^2}u(x) + (4 - \sin(x))u(x) = 0 \ ,$$

(c)

$$2\frac{d^2}{dx^2}u(x) + 4x\frac{d}{dx}u(x) + 3e^x u(x) = xu(x) \ ,$$

(d)

$$(1 + x)\frac{d^2}{dx^2}u(x) + 5xu(x) = \arctan(x)u(x) \ .$$