Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 3

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 29.04., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 02.05., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe sollen Sie die Sturm-Liouville Differentialgleichung in eine Form bringen, die für Beweise sehr wichtig ist. In den letzten beiden Aufgaben sollen Sie Vertrautheit mit elementaren Begriffen der Funktionalanalysis gewinnen. Die Funktionalanalysis ist eine Verallgemeinerung von Begriffen der Linearen Algebra auf Funktionenräume, d. h. auf Räume, deren Elemente keine Vektoren in $\mathbb{C}^n$ sind, sondern deren Elemente Funktionen sind. In der zweiten Aufgabe führen wir den Begriff der linearen Unabhängigkeit von Funktionen ein. In der dritten Aufgabe sollen Sie die lineare Unabhängigkeit an einem Beispiel anwenden und den Begriff der Basis wiederholen.

6. Transformierte Sturm-Liouville Gleichung *6 Punkte*

Wir betrachten die lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}u(x)\right) + q(x)u(x) = \lambda w(x)u(x) \ , \qquad (*)$$

wobei $u(x)$ auf dem Intervall (a,b) definiert ist und $p(x) > 0$, $w(x) > 0$. Für $x_0 \in (a,b)$ existiert eine Koordinatentransformation

$$y : (a,b) \to (A,B) \ , \quad y(x) := \int_{x_0}^{x} \left(\frac{w(t)}{p(t)}\right)^{\frac{1}{2}} dt \ ,$$

wobei $A = \int_{x_0}^{a} (w(t)/p(t))^{1/2} dt$ und $B = \int_{x_0}^{b} (w(t)/p(t))^{1/2} dt$. Weiterhin definieren wir eine neue Funktion

$$\begin{aligned} v(y) &:= f(x)u(x) \qquad \forall x \in (a,b) \\ &:= f(x(y))u(x(y)) \qquad \forall y \in (A,B). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Gleichung $(*)$ durch geeignete Wahl der Funktion $f(x)$ in die Form

$$\frac{d^2}{dy^2}v(y) + r(y)v(y) = \lambda v(y) \qquad (**)$$

gebracht werden kann. Bestimmen Sie die Funktionen $f(x)$ und $r(y)$.

Hinweis 1: Ein möglicher Lösungsweg besteht darin, die Definition von v und y in Gleichung $(**)$ einzusetzen und einen Koeffizientenvergleich mit Gleichung $(*)$ durchzuführen.

Hinweis 2: Für die Lösung dieser Aufgabe ist es ausreichend $r(x(y))$ im Endergebnis als Funktion $r(x)$ auszudrücken, d. h. die Abbildung $x = x(y)$ muss nicht explizit bestimmt werden.

7. Eigenfunktionen *3 Punkte*

Ein Sturm-Liouville Operator $\mathcal{L}$ hat n verschiedene Eigenwerte λ_i und n zugehörige Eigenfunktionen $u_i(x)$ mit $\mathcal{L}u_i(x) = \lambda_i u_i(x)$. Zeigen Sie, dass die Eigenfunktionen $u_i(x)$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Funktionen linear abhängig sind, d. h. $u_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i(x)$ für alle x. Benutzen Sie nur diese Annahme und die Operator-Eigenfunktionsgleichung und zeigen Sie, dass die Annahme zu einem Widerspruch führt.

8. Eigenfunktionen und Basis *4 Punkte*

Die Funktionen $v_n(x) = \sin(nx)$ mit $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $w_n(x) = \cos(nx)$ mit $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sind Eigenfuntionen des Sturm-Liouville Operators $-\frac{d^2}{dx^2}$ für $x \in [0, 2\pi]$ zu den periodischen Randbedingungen $u(0) = u(2\pi)$ und mit den Eigenwerten $\lambda_n = n^2$.
Aus Aufgabe 7 folgt, dass die $\{v_n\}$ und die $\{w_n\}$ jeweils linear unabhängig sind. Man kann darüber hinaus sogar zeigen, dass die Menge $\{v_n,\ w_n\}$ linear unabhängig und vollständig ist. Dass heißt, es gibt keine weitere stetige Funktion f mit $f(0) = f(2\pi)$, welche nicht als Linearkombination

$$f(x) = \sum_{j>0} \alpha_j v_j(x) + \sum_{k\geq 0} \beta_k w_k(x)$$

darstellbar ist.
Wir betrachten beispielhaft die Menge der Funktionen $\{v_1,\ \ldots,\ v_5,\ w_0,\ \ldots,\ w_5\}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

(a) $f_3(x) = \sin^3(x)$,

(b) $f_4(x) = \sin^4(x)$,

(c) $f_5(x) = \sin^5(x)$

als Linearkombination

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{5} \alpha_j v_j(x) + \sum_{k=0}^{5} \beta_k w_k(x) \qquad (***)$$

darstellbar sind. Bestimmen Sie die α_j und β_k. Kann man diese Entwicklung auch für $f_2(x) = \cos^2(x)$ durchführen? In Analogie zur Linearen Algebra kann man die Funktionen v_j und w_k mit den Basisvektoren $\mathbf{e}$ eines 11-dimensionalen Vektorraumes identifizieren. Wie würde man in der Linearen Algebra die α_j und β_k nennen?