Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 4

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 06.05., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 09.05., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe sollen Sie eine Differentialgleichung explizit lösen. Die letzten beiden Aufgaben sollen Ihre Vertrautheit mit elementaren Begriffen der Funktionalanalysis vertiefen. In der zweiten Aufgabe soll die Orthonormiertheit der trigonometrischen Funktionen gezeigt werden. In der dritten Aufgabe soll eine Methode zur Erzeugung eines Orthonormalsystems gezeigt und angewendet werden.

9. Lösung Sturm-Liouville Problem

4 Punkte

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$-x^2u''(x) - xu'(x) = \lambda u(x) \qquad \text{für} \qquad 1 < x < e^\pi$$

mit den Randbedingungen $u(1) = u(e^\pi) = 0$. Für welche Werte von λ besitzt dieses (Sturmsche) Randwertproblem nichttriviale Lösungen? Geben Sie für diese λ-Werte jeweils alle Lösungen an.

Hinweis: Wenden Sie den Formalismus an, den wir in den vorhergehenden Übungen ausgearbeitet haben, und lösen Sie die sich daraus ergebende bekannte Differentialgleichung.

10. Orthonormalsystem

4 Punkte

Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\left\{ v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ v_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx),\ w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx);\ \text{mit } n \in \mathbb{N}_{>0} \right\}$$

ein Orthonormalsystem des Skalarproduktraumes $(V,\ \langle\cdot|\cdot\rangle)$ bilden. Hierbei sind der Vektorraum $V = \{f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}; f \text{ stetig}\}$ und das Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ist definiert als

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f(x)g(x) \qquad \text{für alle} \qquad f,\ g \in V\ .$$

11. Gram-Schmidt Verfahren

2+2+2 Punkte

(a) Gegeben sei der Skalarproduktraum $(\mathbb{C}^N,\ \langle\cdot|\cdot\rangle)$ mit dem Skalarprodukt $\langle\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \sum_i x_i^* y_i$ für alle $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^N$. Das Skalarprodukt definiert eine Norm $\|x\| = (\langle x|x\rangle)^{1/2}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$.

Sei $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_M\}$ mit $M \leq N$ ein System linear unabhängiger Vektoren in $\mathbb{C}^N$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\mathbf{v}_1,\ \dots,\ \mathbf{v}_M\}$ mit

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w}_1\|}$$

und

$$\mathbf{v}_n = \frac{\mathbf{w}_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle\mathbf{v}_i|\mathbf{w}_n\rangle\mathbf{v}_i}{\left\|\mathbf{w}_n - \sum_{i=1}^{n-1}\langle\mathbf{v}_i|\mathbf{w}_n\rangle\mathbf{v}_i\right\|} \quad \text{für} \quad 1 < n \leq M$$

ein Orthonormalsystem in $(\mathbb{C}^N,\ \langle\cdot|\cdot\rangle)$ bildet. Was gilt für $M = N$?

(b) Wenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren aus (a) für $N = M = 3$ und die Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an.

(c) Gegeben sei jetzt der Skalarproduktraum $(V,\ \langle\cdot|\cdot\rangle)$, wobei V ein Vektorraum von Funktionen $x:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist und das Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ definiert ist als $\langle x|y\rangle = \int dt\ \rho(t) x^*(t) y(t)$ für alle $x,\ y \in V$. Das Skalarprodukt definiert eine Norm $\|x\| = (\langle x|x\rangle)^{1/2}$ für alle $x \in V$.

Gegeben sei die Gewichtsfunktion $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-t^2/2)$ und die Funktionen

$$w_0(t) = 1,\ w_1(t) = t,\ w_2(t) = t^2,\ w_3(t) = t^3\ .$$

Bestimmen Sie das Orthonormalsystem $\{v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3\}$.