Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 5

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 13.05., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 16.05., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

Motivation: Ziel dieses Übungsblattes ist es weitere Anwendungen des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens und der Fourier-Transformation zu betrachten.

12. Orthonormalsystem

4+4 Punkte

Orthonormieren Sie die Funktionen $w_n(x) = x^n$ mit $n = 0, 1, 2, 3$ für folgende Intervalle und Gewichtsfunktionen.

(a) Betrachten Sie das Intervall $[-1, 1]$ und die Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1$.

(b) Betrachten Sie das Intervall $[0, \infty)$ und die Gewichtsfunktion $\rho(x) = e^{-x}$.

13. Variationsmethode

1+1+1+1 Punkte

Wir betrachten die Funktion

$$\psi(x) = \mathcal{N} x e^{-\alpha x}$$

im Interval $0 \leq x < \infty$ mit der Gewichtsfunktion $\rho(x) = 1$.

(a) Normieren Sie die Funktion ψ durch geeignete Wahl von $\mathcal{N}$.

(b) Bestimmen Sie

$$\left\langle \frac{1}{x} \right\rangle := \int_0^\infty dx \, \frac{\psi^2(x)}{x} \; .$$

(c) Bestimmen Sie

$$\left\langle \frac{d^2}{dx^2} \right\rangle := \int_0^\infty dx \, \psi(x) \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \; .$$

(d) Benutzen Sie die Variationsmethode um das α zu bestimmen, welches

$$E_\alpha := \left\langle -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{x} \right\rangle$$

minimiert und geben Sie das Minimum $\min(E_\alpha)$ an.

14. Fourier-Transformation

2+2+2 Punkte

(a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f(x) = e^{-\alpha|x|}$$

für $\alpha > 0$.

(b) Betrachten Sie die Funktionen

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

für $n \in \mathbb{N}_{n\geq 0}$. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$f_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

Eigenfunktionen der Fourier-Transformation sind, d. h. zeigen Sie, dass

$$\tilde{f}_n(k) = f_n(k) \ .$$

(c) Bestimmen Sie die Fourier-Reihe für die 2π-periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & , \ -\pi \leq x < 0 \\ x - \pi & , \ 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Was erhält man im Punkt $x = 0$?