Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 6

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 20.05., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 23.05., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

15. Variationsmethode

1+1+1+2 Punkte

Betrachten Sie die Funktion

$$\psi(x) = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$$

mit $\sigma > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ mit der Gewichtsfunktion $w(x) = 1$.

(a) Normieren Sie die Funktion ψ durch geeignete Wahl von $\mathcal{N}$.

(b) Bestimmen Sie

$$\left\langle x^2 \right\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \psi(x) x^2 \psi(x) \ .$$

(c) Bestimmen Sie

$$\left\langle \frac{d^2}{dx^2} \right\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \psi(x) \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \ .$$

(d) Benutzen Sie die Variationsmethode um das σ zu bestimmen, welches

$$\lambda_\sigma := \left\langle -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{2} x^2 \right\rangle$$

für $\omega > 0$ extremiert. Zeigen Sie, dass der Extremwert ein Minimum ist und geben Sie das Minimum $\min(\lambda_\sigma)$ an.

16. Methode der kleinsten Quadrate

2+2+2+2 Punkte

Sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum und $\{v_1, \ \dots\}$ ein Orthonormalsystem. Eine wichtige Aufgabe der mathematischen Physik besteht darin, eine gegebene Funktion $u \in V$ durch eine Linearkombination $s_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k v_k$ möglichst gut im Quadratmittel zu approximieren, das heißt die λ_k so zu wählen, dass

$$\|u - s_m\|$$

möglichst klein wird. Hierbei ist $\|\dots\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm.

(a) Bestimmen Sie die λ_k für $k = 1, \ \dots, \ m$.

(b) Zeigen Sie, dass für die normierten trigonometrischen Funktionen und das Skalarprodukt

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx\ f^*(x)g(x)$$

die λ_k gerade die Fourier-Koeffizienten sind.

(c) Sei

$$u(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{18} \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi]\ .$$

Bestimmen Sie das minimale m und $\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m\}$ für das Orthonormalsystem der trigonometrischen Funktionen aus Aufgabe 10 (Blatt 4) so, dass

$$\|u - s_m\|^2 < 0{,}006\ .$$

(d) Sei u wie in (c) und sei $(V, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ ein Skalarproduktraum, wobei V ein Vektorraum von Funktionen $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist und das Skalarprodukt $\langle\cdot|\cdot\rangle$ definiert ist als

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} f^*(x)g(x)$$

für alle $x,\ y \in V$.

Bestimmen Sie die $\{\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_4\}$ für das Orthonormalsystem

$$v_0(x) = 1\ , \quad v_1(x) = x\ , \quad v_2(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt{2}}\ , \quad v_3(x) = \frac{x^3-3x}{\sqrt{6}}\ , \quad v_4(x) = \frac{x^4-6x^2+3}{\sqrt{24}}\ .$$

Bestimmen Sie $\|u - s_m\|$.

17. Randwertproblem

0+0 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass das Randwertproblem

$$u''(x) + \frac{1}{4x^2}u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in [0,1]$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ für $\lambda = 0$ genau eine nicht-triviale Lösung besitzt.

(b) Lösen Sie das Randwertproblem

$$-(1-x^2)u''(x) + xu'(x) = \lambda u(x), \qquad x \in [-1,1]$$

mit den Dirichlet-Randbedingungen $u(-1) = u(1) = 0$.