Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 9

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 10.06., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 13.06., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

25. Legendre Differentialgleichung *2+2+(2 Bonus) Punkte*

Zu jedem Legendre-Polynom $P_n(x)$ gibt es eine linear unabhängige Funktion

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \mathrm{Polynom(n-1)-tenGrades},$$

die ebenfalls die Legendre Differentialgleichung erfüllt.

(a) Zeigen Sie explizit, dass $P_1(x) = x$ und $Q_0(x) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ zwei Lösungen der Legendre Differentialgleichung sind und bestimmen Sie die zugehörigen Eigenwerte.

(b) Berechnen Sie das Orthogonalitätsintegral

$$\int_{-1}^{1} dx\ \frac{x}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) .$$

(c) Erklären Sie, warum diese beiden Funktionen nicht orthogonal sind, bzw. erklären Sie warum dieser Orthogonalitätsbeweis hier nicht angewendet werden kann.

26. Zweite Lösung einer Differentialgleichung *4 Punkte*

Sei $u_1(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$p_0(x)u''(x) + p_1(x)u'(x) + p_2(x)u(x) = 0 .$$

Zeigen Sie, dass

$$u_2(x) = u_1(x) \int_{x_0}^{x} dt\ \frac{1}{u_1(t)^2} e^{-\int_{x_0}^{t} dz\ p_1(z)/p_0(z)}$$

ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung ist. Was können Sie über die lineare (Un-) Abhängigkeit der beiden Lösungen sagen?
Berechnen Sie explizit die zweite Lösung der Differentialgleichung

$$(1-x^2)u''(x) - 2xu'(x) + \lambda u(x) = 0$$

für

(a) $\lambda = 2$ und $u_1(x) = 1$,

(b) $\lambda = 6$ und $u_1(x) = x$.

27. Hermite Polynome

4 Punkte

Die Hermite-Polynome sind definiert durch

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}$$

wobei $[n/2] = \begin{cases} n/2 & , n \text{ gerade} \\ (n-1)/2 & , n \text{ ungerade.} \end{cases}$

(a) Beweisen Sie, dass e^{2tx-x^2} die erzeugende Funktion der Hermite Polynome ist, dass also gilt

$$e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x).$$

Hinweis: Gehen Sie analog zur Vorlesung vor, wo die Erzeugende Funktion der Legendre Polynome behandelt wurde.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass

$$\begin{aligned} H_{2n}(0) &= (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \\ H_{2n+1}(0) &= 0. \end{aligned}$$