
Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 10

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 17.06., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 20.06., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Mathematical-Methods_2.SS14.html.

28. Kugelflächenfunktionen

2+5 Punkte

Zeigen Sie, dass die Kugelfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \equiv (-1)^{(m+|m|)/2} P_{l|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \right]^{1/2}$$

die in Teil (a) und (b) angegebenen Relationen erfüllen und beachten Sie Anleitung und Hinweise.

- (a) Zeigen Sie mithilfe der Orthogonalitätsrelation für die zugeordneten Legendre-Polynome $P_{l|m|}(z)$ die Orthogonalitätsrelation für Kugelfunktionen:

$$\int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{l'm'}(\theta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'}.$$

- (b) Zeigen Sie, dass sich die Vollständigkeit der Kugelfunktionen – also die Existenz der Entwicklung $f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – durch die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{l=0}^\infty \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \frac{1}{\sin \theta} \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') \quad (1)$$

ausdrücken lässt. Zeigen Sie dazu, dass die linke Seite der Gl. (1) für alle $(\theta, \varphi) \neq (\theta', \varphi')$ verschwindet und für $(\theta, \varphi) = (\theta', \varphi')$ divergiert. Zeigen Sie weiterhin, dass die linke Seite der Gl. (1) die Filter-Eigenschaft der δ -Funktion realisiert.

Hinweis: Verwenden Sie in Teil (b) das Additionstheorem für Kugelfunktionen,

$$\sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta, \varphi) Y_{lm}(\theta', \varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma), \quad \gamma = \angle((\theta, \varphi), (\theta', \varphi')),$$

sowie die erzeugende Funktion der Legendre-Polynome:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2u \cos \theta + u^2}} = \sum_{l=0}^\infty u^l P_l(\cos \theta).$$