Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. B. Zocher

Mathematische Methoden 2 - Übungsblatt 12

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Dienstag, den 01.07., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Freitag, den 24.07., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Mathematical_Methods_2_SS14.html.

31. Drehimpuls-Operator

3+2 Punkte

Teilchen, die weder miteinander noch mit einem äußeren Potential wechselwirken, werden in der Quantenmechanik durch die Schrödingergleichung

$$-\nabla^2\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \tag{1}$$

beschrieben, wobei $\mathbf{r}$ den Ortsvektor im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Die Energie E des Teilchens ist eine gegeben Zahl > 0.

(a) Beweisen Sie, dass der Operator der kinetischen Energie in Kugelkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$-\nabla^2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\mathbf{L}^2.$$

Hierbei ist

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

der Operator für das Quadrat des Drehimpulses.

Hinweis: Starten Sie von

$$-\mathbf{L}^2 = (\mathbf{r}\times\nabla)^2 = \sum_i \left(\sum_{jk}\epsilon_{ijk}x_j\nabla_k\right)\left(\sum_{lm}\epsilon_{ilm}x_l\nabla_m\right)$$

und nutzen Sie die Identität $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\psi_{klm}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2k^2}{\pi}}j_l(k|\mathbf{r}|)Y_{lm}(\theta,\varphi), \quad k = \sqrt{E}$$

Lösungen der Schrödingergleichung (1) sind. Hierbei bezeichnen

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l\left(\frac{1}{\rho}\partial_\rho\right)^l\frac{\sin\rho}{\rho}$$

die sphärischen Besselfunktionen und

$$Y_{lm}(\theta,\varphi) \equiv (-1)^{(m+|m|)/2}P_{l|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2}$$

die Kugelflächenfunktionen.

32. Zugeordnete Laguerre Polynome

2+2+2 Punkte

Die zugeordneten Laguerre-Polynome sind definiert als

$$L_n^\nu(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+\nu}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}.$$

(a) Zeigen Sie die Rodriguez-Formel

$$L_n^\nu(x) = \frac{1}{n!} \frac{e^x}{x^\nu} \frac{d^n}{dx^n} \left(x^{n+\nu} e^{-x} \right).$$

Hinweis: Gehen Sie analog zur Herleitung für die Legendre-Polynome vor.

(b) Beweisen Sie die erzeugende Funktion

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^\nu(x) t^n = \frac{1}{(1-t)^{\nu+1}} e^{-\frac{xt}{1-t}}.$$

(c) Beweisen Sie die Rekursionsrelation

$$L_n^\nu(x) = L_n^{\nu+1}(x) - L_{n-1}^{\nu+1}(x).$$