Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 1

Sommersemester 2014

Bemerkung: Die Aufgaben sind unbewertet und werden in der Übung am Dienstag, den 15.04., besprochen.

Motivation: In den ersten zwei Aufgaben sollen Sie Vertrautheit mit dem mathematischen Formalismus der Quatenmechanik gewinnen und auch einige Eigenschaften der Delta-Funktion kennenlernen. Die dritte und vierte Aufgabe helfen dabei, die Heisenbergsche Unfschärferelationen zu verstehen.

1. Diracsche Delta-Funktion *0 Punkte*

Die Diracsche Delta-Funktion kann dargestellt werden als

$$\delta(x) = \lim_{a\to 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}a} e^{-x^2/a^2}, \quad a > 0.$$

Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) = 1$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x) f(x) = f(0)$

(iii) $\delta(cx) = \frac{1}{|c|}\delta(x), \quad c \neq 0$

(iv) $x\delta(x) = 0$

(v) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta'(x) f(x) = -f'(0)$

Beachten Sie: Die Deltafunktion ist immer als Faktor innerhalb eines Integrals wie in (i) zu verstehen, wobei $\lim_{a\to 0}$ nach der Integration auszuführen ist! Verwenden Sie für Ihre Beweisführung *nur* das vollständige Gauss-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$$

sowie die Taylor-Entwicklung

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \cdots .$$

2. Inverse Fourier-Transformation *0 Punkte*

Die Darstellung der Deltafunktion

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}$$

soll durch Auswertung von $\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ \exp(ikx - \epsilon k^2)$ für $\epsilon > 0$ mittels quadratischer Ergänzung und Rückführung auf obige δ-Funktionsdarstellung (siehe Aufgabe 1.) abgeleitet werden.
Zeigen Sie damit, dass eine Fourier-Transformation $\tilde{f}(k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{ikx} f(x)$ durch $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{-ikx}\tilde{f}(k)$ invertiert wird.

3. Wellenpakete *0 Punkte*

In der Vorlesung wurde gezeigt, wie ein eindimensionales Gaußsches Wellenpaket eines Teilchens der Masse m im Laufe der Zeit zerfließt. Wenn ein solches Wellenpaket anfangs ($t = 0$) die Form $\psi(k) = \mathcal{N} \exp(-(k-k_0)^2 b^2/2)$ mit einer Normierungskonstanten $\mathcal{N}$, einem mittleren Impuls $\hbar k_0$ und einer Ortsunschärfe b besitzt, gilt für die zeitliche Entwicklung der Ortsunschärfe

$$(\Delta x)^2 = \frac{b^2}{2}(1 + \frac{t^2 \hbar^2}{m^2 b^4}).$$

Wie lange dauert es für ein Elektron ($m \approx 10^{-27}$g), ein C_{60} Molekül ($m \approx 10^{-21}$g) und eine Schrotkugel ($m \approx 1$g), bis sich das anfängliche Schwankungsquadrat der Ortsunschärfe verdoppelt hat? Dabei sei die Ortsunschärfe anfänglich jeweils etwa ein Atomabstand, $b \approx 10^{-8}$cm.
Ein Elektron in einem Elektronenmikroskop habe eine Geschwindigkeit $v \approx 10^8$m/s und eine abgefeuerte Schrotkugel $v \approx 10^3$m/s. Wie groß sind die zugehörigen de Broglie Wellenlängen?

4. Unschärferelation *0 Punkte*

Es gelingt bekanntlich niemandem, einen gut gespitzten Zahnstocher auf harter Unterlage ohne Hilfsmittel so senkrecht auszubalancieren, daß er auf der Spitze stehen bleibt. Liegt das am Ungeschick oder an der Unschärfe? Wie lange dauert es z.B. maximal, bis die quantenmechanischen Unschärfen von Einstellwinkel und Drehimpuls um die Spitze zu einer Neigung von 1^o gegen die Senkrechte führen? Das Ergebnis ist verblüffend. Kann man daraus wirklich schließen, die Unschärferelation spiele hier praktisch eine Rolle?

Tipp: klassische Bewegungsgleichung lösen und Unschärferelation zur Bestimmung des anfänglichen Drehimpulses l_0 aus der anfänglichen Auslenkung φ_0 verwenden. Anschließend die Anfangsauslenkung φ_0 so wählen, daß die Fallzeit maximal wird. Die Rechnung vereinfacht sich, wenn Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für große Zeiten durch ihren asymptotischen Verlauf annähern.