Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 4

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis **spätestens Mittwoch, den 30.04., 17:00 Uhr** in das **ITP-Postfach von Herrn A. Janot** eingeworfen werden.
Koordinaten: Brüderstr. 16, Raum 105 b (hinter der Kaffeeküche).

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe werden einige wichtige Eigenschaften der Gauss-Verteilung erarbeitet. In der zweiten Aufgabe sollen Messergebnisse eines fiktiven Experiments statistisch ausgewertet werden. Die dritte, unbewertete Aufgabe führt die Begriffe der charakteristischen Funktion, Momente und Kumulanten für kontinuierliche und diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung ein.

13. Gauss-Verteilung

2+2+2+2 Punkte

Als Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ sei eine Gauss-Verteilung gegeben:

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,\, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Gehen Sie nun wie folgt vor:

(i) Überzeugen Sie sich für die angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung von der Normierung $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) = 1$.

(ii) Berechnen Sie für die Gauss-Verteilung $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ und bestimmen Sie damit $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$.

(iii) Zeigen Sie für eine Verteilung $p(x)$, für welche $\langle x \rangle$ und $\langle x^2 \rangle$ existieren, dass $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$. Hierbei ist $\sigma = \sqrt{\langle \Delta x^2 \rangle}$ mit $\Delta x = x - \langle x \rangle$. Berechnen Sie für die Gauss-Verteilung σ^2 ohne Ausnutzung der eben gezeigten Beziehung.

(iv) Überzeugen Sie sich davon, dass für eine symmetrische Verteilung, d.h. $p(x) = p(-x)$, alle Erwartungswerte $\langle x^n \rangle$, mit $n \in \mathbb{N}$, n ungerade verschwinden.

Hinweis: Erwartungswerte von Funktionen $f(x)$ sind durch $\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x) f(x)$ definiert. Machen Sie weiterhin vom folgenden Integral gebrauch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz\, \mathrm{e}^{-z^2} = \sqrt{\pi}.$$

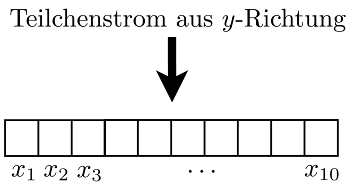

Abbildung 1: Darstellung der Detektoranordnung entlang der x-Achse. Die Position eines Teilchens das auf den i-ten Detektor fällt wird mit x_i identifiziert.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
n_i	1	3	11	18	18	26	15	5	1	2

Tabelle 1: Anzahl n_i der jeweiligen Detektorklicks im gegebenen Zeitintervall des Experiments.

14. Detektorstatistik *2+2+2 Punkte*

Wir betrachten eine 1-dimensionale Anordnung von Detektoren, wie in Abbildung 1 dargestellt. Dabei falle aus der y-Richtung ein Teilchenstrahl aus einem experimentellen Aufbau auf die Detektoren, mit denen sich die Position eines einfallenden Teilchens in x-Richtung mit der durch die Detektoranordnung gegebenen Auflösung bestimmen lässt. Die Detektorpositionen sind dabei gegeben durch $x_i = i\,l$, $i = 1, \ldots, 10$ und l dem Abstand zwischen den Mittelpunkten zweier Detektoren. Die Ergebnisse einer Messung sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Durch die Anzahl der jeweiligen Detektorklicks n_i über ein bestimmtes Zeitintervall lassen sich die Häufigkeiten $f_i = n_i / \sum_{i=1}^{10} n_i$ ermitteln. Identifizieren Sie diese mit den Detektionswahrscheinlichkeiten p_i.

(i) Berechnen Sie $\langle x^2 \rangle$ und $\langle x \rangle^2$.

(ii) Ermitteln Sie die Abweichung $\Delta x = x - \langle x \rangle$ für $i = 1, \ldots, 10$.

(iii) Berechnen Sie mit Ihren Ergebnissen für die Δx die Standardabweichung σ aus der Varianz (das Quadrat der Standardabweichung), $\sigma^2 = \langle \Delta x^2 \rangle$. Berechnen Sie nun mit Ihren Ergebnissen für $\langle x^2 \rangle$ und $\langle x \rangle^2$ den Wert $\sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$. Ist $\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ erfüllt?

Hinweis: Für eine diskrete Verteilung $\{p_i\}$ berechnen sich Erwartungswerte von Funktionen $f(x)$ durch $\langle f(x) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} p_i f(x_i)$, wobei $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Beachten Sie dazu auch die Bemerkung zu Aufgabe 15.

15. Verteilungen, Momente und Kumulanten *0 Punkte*

Wir betrachten eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Das n-te Moment μ_n ($n \in \mathbb{N}$) der Verteilung ist definiert durch $\mu_n = \langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, x^n p(x)$. Die sogenannte *charakteristische Funktion* der Verteilung ist über Fourier-Transformation definiert:

$$
\begin{aligned}
\chi(k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} p(x) = \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \right\rangle \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\mathrm{i})^n \mu_n\, k^n.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Die sogenannten *Kumulanten*, C_n, einer Verteilung sind durch den Logarithmus der charakteristischen Funktion definiert: $\ln \chi(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}k)^n}{n!} C_n$. Es lässt sich zeigen, dass die Kumulanten durch die Momente der Verteilung ausgedrückt werden können. Es gilt für die ersten drei Kumulanten:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \mu_1, \\
C_2 &= \mu_2 - \mu_1^2, \\
C_3 &= \mu_3 - 3\mu_1\mu_2 + 2\mu_1^3.
\end{aligned}
$$

(i) Verifizieren Sie die Darstellung in der zweiten Zeile von Gl. (1) durch eine Taylor-Entwicklung von $\chi(k)$ um $k = 0$.

Hinweis: Schreiben Sie hierzu die Exponentialreihe aus und nehmen Sie an, dass Summation und Integration für hinreichend gutartige $p(x)$ vertauschen.

(ii) Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\chi(k)$ für eine Gauss-Verteilung

$$
p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha^2}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,\, x_0 \in \mathbb{R}.
$$

(iii) Leiten Sie die obigen Darstellungen von C_1 und C_2 aus Ihrem Ergebnis für $\chi(k)$ her.

Bemerkung: Die obigen Definitionen übertragen sich auf Zufallsvariablen mit diskretem Wertebereich $x \in \{x_1, x_2, \dots\}$. Diese lassen sich durch Wahrscheinlichkeitsverteilungen $p(x) = p_1\delta(x - x_1) + p_2\delta(x - x_2) + \dots$, mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ darstellen.