Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 5

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 08.05., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 13.05., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/~stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: Während in der ersten Aufgabe das Verständnis von Wahrscheinlichkeitsdichte und -strom vertieft werden soll, sind die anderen Aufgaben dem Rechnen mit Operatoren gewidmet. Außer dem Beweis zweier Eigenschaften von adjungierten Operatoren geht es um Kommutatorrelationen, deren Berechnung geübt werden soll. Der geschickte Umgang mit Kommutatoren ist eine wichtige Vorraussetzung für die Lösung vieler Probleme in der Quantenmechanik.

16. Stationäre Zustände *4 Punkte*

Stationäre Lösungen der Schrödingergleichung haben die Form (wobei wir der Einfachheit halber den 1-dimensionalen Fall betrachten)

$$\psi(x,t) = \phi(x) \cdot \chi(t) \ .$$

Zeigen Sie, daß für solche Lösungen sowohl die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x,t)$ als auch die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j(x,t)$ zeitlich konstant sind! Dabei sind

$$\rho(x,t) = \psi^*(x,t)\psi(x,t), \quad j(x,t) = \frac{\hbar}{2m\mathrm{i}} \left[\psi^*(x,t) \frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\psi^*(x,t) \right) \psi(x,t) \right] .$$

Hinweis: Leiten Sie dazu zunächst aus der zeitabhängigen Schrödingergleichung,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi(x,t),$$

eine Bestimmungsgleichung für $\chi(t)$ her.

17. Adjungierte Operatoren *1+1 Punkte*

$\hat{A}^\dagger$ heißt zu $\hat{A}$ adjungierter Operator, wenn $(\hat{A}^\dagger \phi, \psi) = (\phi, \hat{A}\psi)$ für alle Wellenfunktionen $\psi \in D(\hat{A})$ und $\phi \in D(\hat{A}^\dagger)$, mit $D(\hat{A})$ und $D(\hat{A}^\dagger)$ den Definitionsbereichen der Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{A}^\dagger$. Zeigen Sie:

(i) $(c\hat{A})^\dagger = c^* \hat{A}^\dagger$ für alle Operatoren $\hat{A}$ und Zahlen $c \in \mathbb{C}$.

(ii) $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$ für alle Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$.

18. Kommutatoren

2+2+2+2 Punkte

Da Operatoren im allgemeinen nicht vertauscht werden können, ist es nützlich, für Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ den Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ zu definieren. Häufig taucht auch der sogenannte Antikommutator auf, definiert durch $\{\hat{A}, \hat{B}\} := \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.
Seien $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ beliebige Operatoren, $\hat{x}$ und $\hat{p}$ Orts- und Impulsoperator. Zeigen Sie in der angegebenen Reihenfolge:

(i) $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

(ii) Sind $\hat{A}$ und $\hat{B}$ selbstadjungiert, so sind auch die Operatoren $\mathrm{i}[\hat{A}, \hat{B}]$ sowie $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ selbstadjungiert. (Achtung, $\hat{A}\hat{B}$ ist im allgemeinen nicht selbstadjungiert.)

(iii) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}$, falls $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$.

(iv) $[\hat{p}, f(\hat{x})] = -\mathrm{i}\hbar f'(\hat{x})$.
Nehmen Sie dabei an, daß die Funktion $f(x)$ als Potenzreihe $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n$ darstellbar ist, und nutzen sie die Kommutatorrelation $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$.

19. Drehimpulsoperator

0 Punkte

Der Drehimpulsoperator ist definiert durch $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$ mit dem Orts- und Impulsoperator $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$. Zeigen Sie, daß für seine Komponenten $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$ gilt, wobei ϵ der total antisymmetrische Tensor ist. Benutzen Sie dazu die Kommutatorrelationen $[\hat{r}_i, \hat{p}_j] = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}$ für die Komponenten $\hat{r}_i, \hat{p}_j$, mit $i, j \in \{x, y, z\}$ von Orts- und Impulsoperator in drei Raumdimensionen.

Hinweis: Es gilt $\epsilon_{kij}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$.