Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 6

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 15.05., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 20.05., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: Die erste Aufgabe beschäftigt sich mit dem Ehrenfest-Theorem für die Zeitentwicklung quantenmechanischer Erwartungswerte und seinem Bezug zur klassischen Newtonschen Bewegungsgleichung. Drei weitere Aufgaben vertiefen den Operator-Kalkül. Während in der zweiten Aufgabe eine Identität zur Berechnung von Exponentialfunktionen von Operatoren bewiesen werden soll, welche später benötigt wird, um die Zeitentwicklung von Observablen zu berechnen, wird in der dritten Aufgabe die Unabhänigkeit der Kommutatorrelationen von Orts- und Impulsoperator für Orts- und Impulsdarstellung gezeigt. In der letzten Aufgabe wird die in der Vorlesung für Orts- und Impulsoperator besprochene Herleitung der Heisenbergschen Unschärferelation auf beliebige Operatoren übertragen.

20. Ehrenfest Theorem

4 Punkte

Der Ehrenfestsche Satz über die Zeitentwicklung der Erwartungswerte von Operatoren liefert für den Ortsoperator die Beziehung

$$m\frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle = \langle\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})\rangle \quad .$$

Damit der Erwartungswert $\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle$ tatsächlich der klassischen Bewegungsgleichung genügt, müßte man $\langle\mathbf{F}(\hat{\mathbf{r}})\rangle$ durch $\mathbf{F}(\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle)$ ersetzen können. Leiten Sie durch Taylorentwicklung der Kraft um den Erwartungswert $\langle\hat{\mathbf{r}}\rangle$ ein Kriterium für die Gültigkeit dieser Ersetzung ab.

21. Baker–Hausdorff–Identität

3 Punkte

Zeigen Sie, dass für beliebige Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ die Baker-Hausdorff-Identität gilt:

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \cdots ,$$

wobei $e^{\hat{A}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\hat{A}^n$.

Hinweis: Zeigen Sie diese Identität, indem Sie $\hat{A}$ durch $\lambda\hat{A}$ ersetzen und die Gleichheit beider Seiten und ihrer Ableitungen nach λ für $\lambda = 0$ nachweisen.

22. Unabhängigkeit von der Darstellung *3 Punkte*

Berechnen Sie explizit den Kommutator $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$ in Orts- und Impulsdarstellung! Dabei bezeichnen $\hat{x}_i$ bzw. $\hat{p}_j$ die Komponenten der vektorwertigen Operatoren $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$.

23. Heisenbergsche Unschärferelation *5 Punkte*

Gegeben seien zwei hermitesche Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ und ein beliebiger Zustand ψ. Zeigen Sie die allgemeine Heisenbergsche Unschärferelation

$$(\Delta\hat{A})(\Delta\hat{B}) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle|\,,$$

wobei $\langle\hat{A}\rangle \equiv (\psi, \hat{A}\psi)$.

Hinweis: Für das Skalarprodukt zweier Wellenfunktionen gilt die Schwarzsche Ungleichung

$$|(\phi, \psi)|^2 \leq (\phi, \phi)(\psi, \psi)\,.$$

Die Unschärfe $\Delta\hat{A}$ ist als positive Quadratwurzel des Schwankungsquadrates

$$(\Delta\hat{A})^2 = (\psi, (\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\psi)$$

definiert. Wenden Sie die Schwarzsche Ungleichung auf das Skalarprodukt $(\tilde{A}\psi, \tilde{B}\psi)$ an, wobei $\tilde{X} := \hat{X} - \langle\hat{X}\rangle$. Zerlegen Sie dann mittels des Antikommutators $\{\tilde{A}, \tilde{B}\} = \tilde{A}\tilde{B} + \tilde{B}\tilde{A}$ das Produkt $\tilde{A}\tilde{B}$ in einen hermiteschen und einen antihermiteschen Anteil:

$$\tilde{A}\tilde{B} = \frac{1}{2}\{\tilde{A}, \tilde{B}\} + \frac{1}{2}[\tilde{A}, \tilde{B}]\,.$$

Diese Zerlegung bedeutet für den Mittelwert eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil.