Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

# Quantenmechanik - Übungsblatt 7

*Sommersemester 2014*

**Abgabe:** Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 22.05., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 27.05., in den Übungen.

**Internet:** Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

**Motivation:** In der ersten Aufgabe wird die Invarianz von Wahrscheinlickeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte für ein 3-dimensionales quantenmechanisches System unter elektrodynamischen Eichtransformationen bewiesen. Der harmonische Oszillator ist ein physikalisches Standardsystem und wird beispielsweise zur Beschreibung von Photonen oder Schwingungen in Molekülen und Kristallen eingesetzt. Auf diesem Übungsblatt wird der 1-dimensionale harmonische Oszillator aus verschiedenen Blickwinkeln beleuchtet. In der zweiten Aufgabe werden seine Energieeigenwerte im Rahmen der semiklassischen Näherung berechnet. Durch den Formalismus der Leiteroperatoren kann er algebraisch ohne Verwendung von Wellenfunktionen vollständig beschrieben werden. Das Rechnen mit der entsprechenden Algebra soll in der dritten Aufgabe geübt werden, während in der vierten Aufgabe einige Eigenschaften von Hermite-Polynomen untersucht werden.

## 24. Eichinvarianz von Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstromdichte *3 Punkte*

Zeigen Sie die Invarianz von Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\mathbf{r},t) = \psi^*(\mathbf{r},t)\psi(\mathbf{r},t)$$

und Wahrscheinlichkeitsstromdichte

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\psi^*(\mathbf{r},t)\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\right)\psi(\mathbf{r},t)\right\}$$

unter Eichtransformationen $\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},\mathbf{t}) - \nabla\chi(\mathbf{r},\mathbf{t})$, $\psi'(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)\mathrm{e}^{(e/\mathrm{i}\hbar c)\chi(\mathbf{r},t)}$.

## 25. Bohr-Sommerfeld-Quantisierung *2 Punkte*

Berechnen Sie die Energieeigenwerte eines harmonischen Oszillators mit Masse $m$ und Schwingungsfrequenz $\omega$ mit Hilfe der Bohr-Sommerfeldschen Quantisierungsbedingung

$$\oint p\,dq = 2\pi\hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \ .$$

## 26. Erwartungswerte für den harmonischen Oszillator *4 Punkte*

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ und $\hat{p}^2$ im Zustand

$$\Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_0(x) + \psi_2(x)\right) \ ,$$

wobei $\psi_0$ und $\psi_2$ die Wellenfunktionen für den Grundzustand und den zweiten angeregten Zustand des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators sind. Benutzen Sie dabei die Relationen

$$\psi_{n+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \hat{a}^\dagger \psi_n(x) \ , \quad \psi_{n-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{a} \psi_n(x) \ .$$

## 27. Rechnen mit Hermite-Polynomen *3+3 Punkte*

(i) Zeigen Sie, dass die Hermite-Polynome

$$H_n(y) = (-1)^n \mathrm{e}^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} \mathrm{e}^{-y^2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

folgende Differentialgleichung erfüllen:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} - 2y \frac{d}{dy} + 2n \right) H_n(y) = 0. \tag{1}$$

(ii) Zeigen Sie weiterhin folgende Identität:

$$\frac{d}{dy} H_n(y) - 2n H_{n-1} = 0.$$

**Hinweis:** Benutzen Sie für (i) die Methode der vollständigen Induktion. Differenzieren Sie Gl. (1) nach $y$, um den Induktionsschritt von $k = n$ nach $k = n + 1$ zu vollziehen.