Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 8

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen bis **spätestens Mittwoch, den 28.05., 17:00 Uhr** in das **ITP-Postfach von Herrn A. Janot** eingeworfen werden.
Koordinaten: Brüderstr. 16, Raum 105 b (hinter der Kaffeeküche).
Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 03.06., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: In den ersten beiden Aufgaben wird das Wissen über das quantenmechanische Standardsystem *harmonischer Oszillator* vertieft. Kohärente Zustände vermitteln den Übergang zwischen Quanten- und klassischer Physik und werden in vielen quantenoptischen Experimenten realisiert. In der letzten Aufgabe geht es um die Dynamik des harmonischen Oszillators in nicht-kohärenten Zuständen.

28. Kohärente Zustände *3+3 Punkte*

$\psi_0(x)$ sei die Grundzustandswellenfunktion des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Frequenz ω und charakteristischer Länge $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. Kohärente Zustände, gegeben durch

$$\Phi_\alpha(x) = e^{-|\alpha|^2/2+\alpha\hat{a}^\dagger}\psi_0(x) \ ,$$

sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ mit Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$, $\langle\hat{x}^2\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ eines kohärenten Zustands charakterisiert durch den Parameter α. Zeigen Sie, dass ein kohärenter Zustand minimale Orts- und Impulsunschärfe besitzt.

(b) Die Wellenfunktion des Oszillators sei zur Zeit $t = 0$ ein kohärenter Zustand, d.h. $\Psi(x, 0) = \Phi_{\alpha(0)}(x)$. Zeigen Sie, daß die Wellenfunktion im Laufe der Zeit ein kohärenter Zustand bleibt, d.h. $\Psi(x,t) = e^{i\chi(t)}\Phi_{\alpha(t)}(x)$ mit einer gewissen Phase $\chi(t)$, und bestimmen Sie $\alpha(t)$ und $\chi(t)$.

29. Harmonischer Oszillator in Impulsdarstellung *4 Punkte*

Berechnen Sie die Eigenfunktionen eines harmonischen Oszillators mit Masse m und Eigenfrequenz ω in der Impulsdarstellung. Machen Sie sich dabei zunutze, dass die Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung die gleiche Form hat wie in der Orstsdarstellung.

30. Dynamik des harmonischen Oszillators

2+2+2 Punkte

Betrachten Sie einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator mit Masse m und Frequenz ω.

(i) Finden Sie eine Linearkombination $\Phi(x) = \alpha\,\psi_0(x) + \beta\,\psi_1(x)$ der Grundzustandswellenfunktion $\psi_0(x)$ und der Wellenfunktion des ersten angeregten Zustands $\psi_1(x)$, welche den Erwartungswert des Ortsoperators $\langle\hat{x}\rangle$ maximiert.

(ii) Nehmen Sie an die Wellenfunktion des quantenmechanisches Systems $\Psi(x,t)$ sei zur Zeit $t = 0$ gegeben durch $\Phi(x)$, also $\Psi(x,0) = \Phi(x)$. Berechnen Sie für diese Anfangsbedingung die Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ für beliebige Zeiten $t > 0$.

(iii) Berechnen Sie bezüglich $\Psi(x,t)$ das zeitabhängige Schwankungsquadrat $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle$ des Ortsoperators.

Anleitung: Führen Sie alle Rechnungen *nur* durch Ausnutzen der *algebraischen* Eigenschaften von Erzeuger- und Vernichteroperatoren $\hat{a}^\dagger$, $\hat{a}$ durch.