Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 9

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 05.06., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 10.06., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter
http://www.uni-leipzig.de/~stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe wird die quantenmechanische Bewegung in Anwesenheit einer Potentialstufe mit der klassischen Bewegung im selben Potential verglichen. Die zweite Aufgabe führt den Paritätsoperator für 1-dimensionale Quantensysteme und seine Eigenwerte ein. Die dritte Aufgabe beschäftigt sich mit der sogenannten *Streumatrix*, ein zentrales Objekt vieler physikalischer Problemstellungen. Anhand eines stationären Streuproblems wird die Streumatrix für das gegebene System definiert, und die wichtige Eigenschaft der Unitarität aus der Wahrscheinlichkeitserhaltung hergeleitet.

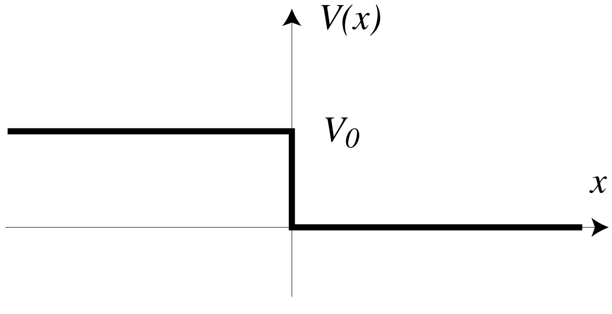
31. Potentialstufe

2+2 Punkte

Ein Teilchen bewege sich im Potential einer eindimensionalen Potentialstufe an der Stelle $x = 0$ der Höhe V_0, siehe Skizze.

(i) Diskutieren Sie qualitativ die verschiedenen klassischen Trajektorien in den Bereichen $x < 0$, $x > 0$ für Energien $0 < E < V_0$ und $E > V_0 > 0$.

(ii) Das Teilchen laufe mit einer Energie $E > V_0$ in Richtung positiver x die Stufe "abwärts". Bestimmen Sie die Reflexions- und Transmissionsamplituden R und T. Welche Werte nehmen sie für $E = V_0 + 0^+$ an?



32. Paritätsoperator

2+2+2 Punkte

Der Paritätsoperator $\hat{P}$ ändert das Argument einer Ortsraumwellenfunktion $\psi(x)$ eines 1-dimensionalen quantenmechanischen Systems von x zu $-x$, d.h. $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$. Man spricht von geraden Funktionen für $\psi(-x) = \psi(x)$ und ungeraden Funktionen wenn $\psi(-x) = -\psi(x)$.

(i) Zeigen Sie, dass der Paritätsoperator $\hat{P}$ mit einem Hamilton-Operator $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V(\hat{x})$ kommutiert, wenn das Potential $V(x)$ symmetrisch bezüglich des Ursprungs bzw. gerade ist: $V(x) = V(-x)$.

(ii) Zeigen Sie, ausgehend von der Rodriguez-Formel $H_n(y) = (-1)^n \mathrm{e}^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} \mathrm{e}^{-y^2}$, $n \in \mathbb{N}$, für die Hermite-Polynome, dass die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators mit Masse m und Frequenz ω Eigenfunktionen des Paritätsoperators sind, und geben Sie die Eigenwerte an.

(iii) Zeigen Sie, dass der auf dem Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen über $\mathbb{R}$ definierte Operator

$$\hat{\Pi} = \exp\left[\mathrm{i}\pi\left(\frac{1}{2\alpha}\hat{p}^2 + \frac{\alpha}{2\hbar^2}\hat{x}^2 - \frac{1}{2}\right)\right], \quad \alpha \in \mathbb{R}^+,$$

den Paritätsoperator darstellt. Dabei sind $\hat{x}$ und $\hat{p}$ Orts- und Impulsoperator.

Hinweis: Betrachten Sie $\hat{\Pi}\psi(x)$ und entwickeln Sie $\psi(x)$ nach den Funktionen eines geeignet gewählten vollständigen Orthonormalsystems.

33. Unitarität der Streumatrix

2+2+2 Punkte

Betrachten Sie ein Potential $V(x)$ mit $V(x) \equiv 0$ ausserhalb eines endlichen Intervalls $I \subset \mathbb{R}$. Die Lösungen der stationären Schrödinger-Gleichung links bzw. rechts des Intervalls I seien gegeben durch $\psi_L(x) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ bzw. $\psi_R(x) = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + D\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$. Zwischen den einlaufenden Amplituden A, D und den auslaufenden Amplituden B, C wird durch die sogenannte Streumatrix S der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} C \\ B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}}_{\equiv S} \begin{pmatrix} A \\ D \end{pmatrix} \tag{1}$$

vermittelt.

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichten j_L und j_R.

(ii) In der hier betrachteten stationären Situation gilt $\dot{\rho}(x,t) = 0$. Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho}(x,t) + \partial_x j(x,t) = 0$$

durch Integration $\int_{\mathbb{R}} dx(\dots)$ und Ausnuztung der Randbedingung $j(+\infty) = j_R$, $j(-\infty) = j_L$ eine Gleichung für die Beträge der Amplituden A, B, C und D her. Eliminieren Sie mit Gl. (1) zwei der Amplituden.

(iii) Leiten Sie nun durch Koeffizientenvergleich Bedingungen an die Elemente von S her, und benutzen Sie diese um zu zeigen, dass die Streumatrix S unitär ist, d.h. $S^\dagger S = \mathbb{1}$.