Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 10

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 12.06., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 17.06., in den Übungen.

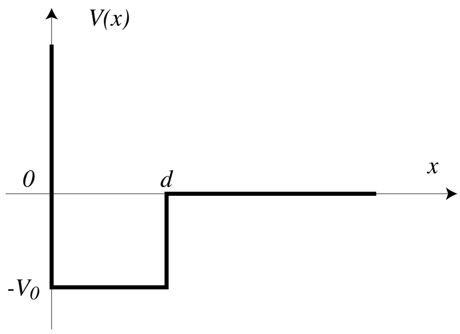
Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: Die ersten beiden Aufgaben beschäftigen sich mit gebundenen Zuständen in einem Potentialtopf. In der ersten Aufgabe steht dabei die Auswirkung einer endlich hohen Wand im Vordergrund, während in der zweiten Aufgabe ein Potentialtopf mit undendlich hohen Wänden zur Berechnung des Absortptionsspektrums eines organischen Kettenmoleküls angewendet wird. Ziel der beiden letzten Aufgaben ist die Berechnung der zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsdichte eines kohärenten Zustands des harmonischen Oszillators.

34. Potentialtopf mit Wand

1+1+1+1+1 Punkte

Ein Teilchen bewege sich in einem 1-dimensionalen Potentialtopf der Breite d und Tiefe V_0 mit einer harten Wand. (Für $x \leq 0$ sei $V(x) = \infty$.)



(i) Machen Sie für $-V_0 < E < 0$ einen Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$. Bauen Sie dabei ein, dass das unendlich hohe Potential für $x \leq 0$ die Bedingung $\psi(0) = 0$ erzwingt.

(ii) Schreiben Sie die Bedingungen explizit auf, die $\psi(x)$ bei $x = d$ erfüllen muss, und leiten Sie aus diesen Bedingungen die Quantisierungsbedingung

$$\tan(Kd) = -K/\kappa$$

für die Energie her, wobei K die Wellenzahl im Bereich $0 \leq x \leq d$ ist und κ den exponentiellen Abfall im Bereich $x \geq d$ beschreibt.

(iii) Skizzieren Sie die beiden Seiten der Quantisierungsbedingung als Funktion von Kd und beachten Sie dabei, dass κ von K abhängt.

(iv) Welche Bedingung müssen d und V_0 erfüllen, damit es überhaupt einen gebundenen Zustand gibt?

(v) Bestimmen Sie für sehr tiefe Töpfe durch eine geeignete Näherung die Grundzustandsenergie.

35. Absorptionslinie von Butadien *1 Punkte*

Die Energieniveaus der sogenannten π-Elektronen in der organischen Verbindung Butadien C_4H_6 können näherungsweise durch einen 1-dimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden beschrieben werden. Im Grundzustand des Moleküls sind die beiden untersten Energieniveaus besetzt, die erste experimentell beobachtbare Anregung findet also zwischen dem zweiten und dritten Energieniveau statt und wird durch eine starke Absorption bei der Wellenlänge $2,17 \times 10^{-7}$ m gemessen. Vergleichen Sie diesen Wert mit der entsprechenden Anregung eines Elektrons in einem Potentialtopf der Länge $a = 5,6 \times 10^{-10}$ m.

36. Kommutatoren *1+1+1 Punkte*

Betrachten Sie zwei Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0 = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]]$. Zeigen Sie folgende Identitäten:

(i) $\hat{A}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}(\hat{A} + [\hat{A},\hat{B}])$,

(ii) $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$,

(iii) $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{B}}e^{\hat{A}}e^{[\hat{A},\hat{B}]}$.

Hinweis:

- Verwenden Sie in Teil (i) die Baker-Hausdorff-Identität, vgl. Aufgabe 21 von Blatt 6.
- Zeigen Sie für Teil (ii), dass die Hilfsfunktion $f(\lambda) = e^{\lambda(\hat{A}+\hat{B})}e^{-\lambda\hat{B}}e^{-\lambda\hat{A}}$ der Differentialgleichung $\frac{d}{d\lambda}f(\lambda) = -\lambda[\hat{A},\hat{B}]f(\lambda)$ genügt, und lösen Sie das zugehörige Anfangswertproblem für $f(0) = \mathbb{1}$. Werten Sie dann das Resultat für geeignetes $\lambda = \lambda_0$ aus um obige Identität zu erhalten.
- Wenden Sie in Teil (iii) die Identität aus (ii) an!

37. Kohärente Zustände als verschobener Grundzustand *2+2+2 Punkte*

Ein kohärenter Zustand sei zur Zeit $t = 0$ gegeben als $\Phi_\alpha(x, t = 0) = e^{-|\alpha|^2/2+\alpha\hat{a}^\dagger}\psi_0(x)$ mit $\alpha \in \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie, dass der Operator $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger-\alpha^*\hat{a}}$ unitär ist und dass $\hat{D}(\alpha)\psi_0(x) = \Phi_\alpha(x)$ gilt.

(ii) Bringen Sie $\hat{D}(\alpha)$ in die Form

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\frac{\alpha-\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{x}}e^{-\frac{i}{\sqrt{m\hbar\omega}}\frac{\alpha+\alpha^*}{\sqrt{2}}\hat{p}}e^{\frac{\alpha^{*2}-\alpha^2}{4}} .$$

(iii) Berechnen Sie damit $\Phi_\alpha(x, t = 0)$ (explizite Ortsabhängigkeit angeben!) und gehen Sie unter Verwendung der Ergebnisse von Aufgabe 28 von Blatt 8 zunächst zu $\Phi_{\alpha(t)}(x, t)$ über. Bestimmen Sie damit die zeitabhängige Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_\alpha(x, t)|^2$ (Skizze!).

Hinweis:

- Verwenden Sie in den Teilaufgaben (i) und (ii) an geeigneter Stelle die Identität $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}$.
- Nutzen Sie in Teil (iii), dass $\mathrm{e}^{a\partial_x}f(x) = f(x + a)$.