Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 11

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 19.06., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 24.06., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe werden gebundene Zustände und Streuzustände eines quantenmechanischen Systems mit einem Deltafunktionspotential in einer räumlichen Dimension betrachtet. Ein Potential mit zwei attraktiven Deltafunktionen dient als einfaches Modell für ein Molekül, während mit zwei repulsiven Funktionen ein Quantentopf modelliert werden kann. Die weiteren Aufgaben dienen zur Einübung des Rechnens mit dem Drehimpulsoperator.

38. Attraktives Delta–Potential *2+2+2 Punkte*

(a) Gegeben sei das Potential $V(x) = -w\,\delta(x),\ w > 0$. Die Lösung $\psi(x)$ der zugehörigen Schrödingergleichung muß bei $x = 0$ stetig sein. Die Ableitung $\psi'(x)$ macht bei $x = 0$ einen Sprung. Leiten Sie die Höhe des Sprunges durch Integration der Schrödingergleichung über eine infinitesimale Umgebung des Nullpunktes her.

(b) Bestimmen Sie für das Potential aus Teilaufgabe (a) die normierten Lösungen $\psi(x)$ zu Energien $E < 0$. Wie viele gebundene Zustände gibt es und zu welchen Energieeigenwerten gehören sie?

(c) Betrachten Sie nun ein Doppelmuldenpotential $V(x) = -w\delta(x - a/2) - w\delta(x + a/2)$. Überzeugen Sie sich davon, daß $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ gilt. Hierbei ist $\hat{P}$ der Paritätsoperator, definiert durch $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$. Suchen Sie gebundene Lösungen mit gerader (+) bzw. ungerader (−) Parität, wobei $\hat{P}\psi_\pm = \pm\psi_\pm(x)$.

39. Rotationsinvarianz des Hamiltonians *2 Punkte*

Ein physikalisches System sei definiert durch einen Hamiltonoperator $\hat{H}$. Zeigen Sie, daß das Problem genau dann kugelsymmetrisch ist, wenn $[\hat{H}, \hat{\mathbf{L}}] = 0$ gilt.

40. Drehimpulsoperator *1+1 Punkte*

Beweisen Sie die folgenden Relationen für Drehimpulsoperatoren ausgehend von der Drehimpuls-Algebra $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$:

(a) $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$ für $i = x, y, z$.

(b) $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm$

41. Matrixdarstellung für Drehimpuls $l = 1$ *4 Punkte*

Leiten Sie unter Verwendung der Beziehungen

$$(\Psi_{l'm'}, \hat{L}_z \Psi_{lm}) = \hbar m \, \delta_{l',l} \delta_{m',m} \quad \text{und} \quad (\Psi_{l'm'}, \hat{L}_\pm \Psi_{lm}) = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} \, \delta_{l',l} \delta_{m',m\pm 1}$$

für festes $l \equiv l' \equiv 1$ eine Matrixdarstellung von $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ im $m - m'$ – Raum ab. Die Kugelfunktionen Ψ_{lm} sind Eigenfunktionen des Drehimpulsoperators mit Gesamtdrehimpuls l und z–Komponente m. Berechnen Sie weiterhin den Kommutator $[\hat{L}_x, \hat{L}_y]$ in dieser Matrixdarstellung.