Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 12

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 26.06., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 01.07., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe wird das sogenannte Kronig–Penney-Modell untersucht. Im Rahmen dieses verhältnismäßig einfachen Modells soll das Auftreten von Energiebändern in periodischen Systemen (wie in kristallinen Festkörpern) beleuchtet werden. Die zweite Aufgabe untersucht die Bedingung für die Existenz eines gebundenen Zustands in einem dreidimensionalen Potentialtopf.

42. Kronig–Penney-Modell *3+3+3+3 Punkte*

Betrachten Sie ein 1-dimensionales quantenmechanisches System mit dem periodischen Potential $V(x) = w\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)$ mit räumlicher Periode a. Das sogenannte *Bloch-Theorem* besagt (was hier aber nicht bewiesen werden, sondern als gegeben angenommen werden soll), dass die Eigenzustände $\psi_k(x)$ zu einem periodischen Hamilton-Operator die Relation

$$\psi_k(x+a) = e^{ika}\psi_k(x),$$

erfüllen, wobei $k \in \mathbb{R}$ als Bloch-Wellenvektor bezeichnet wird.

(i) Finden Sie die Lösungen der Schrödinger-Gleichung mit Energie $E > 0$ in den Bereichen $\mathcal{I}_I =]-a, 0[$ und $\mathcal{I}_{II} =]0, a[$, jeweils als Überlagerung von eben Wellen mit Wellenvektor q. Nutzen Sie das Resultat von Aufgabe 38. von Blatt 11, um die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ zu formulieren. Damit erhalten Sie zwei Gleichungen für die Koeffizienten des Ansatzes.

(ii) Stellen Sie mit dem Bloch-Theorem eine Relation auf, welche die Lösungen in $\mathcal{I}_I$ und $\mathcal{I}_{II}$ verknüpft. Damit erhalten Sie zwei weitere Gleichungen für die Koeffizienten.

(iii) Zeigen Sie, dass das resultierende lineare 2×2 Gleichungssystem nur genau dann nichttriviale Lösungen hat, wenn E und k durch

$$\cos(qa) + \tilde{w}\frac{\sin(qa)}{qa} = \cos(ka)$$

zusammenhängen, wobei $q = \sqrt{2mE}/\hbar$ und $\tilde{w} = mwa/\hbar^2$.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungen dieser transzendenten Gleichung graphisch, und skizzieren Sie den Zusammenhang $E(k)$, die sogennante *Dispersionsrelation.*

43. Dreidimensionaler Potentialtopf *2+1+1 Punkte*

Gegeben ist nun ein dreidimensionaler Potentialtopf mit $V(\mathbf{r}) = -V_0\ \theta(a - |\mathbf{r}|)$, $V_0 > 0$.

(i) Lösen Sie die Schrödingergleichung für Drehimpuls $l = 0$ für gebundene Zustände in den Bereichen $0 < r < a$ und $r > a$.

(ii) Gewinnen Sie dann aus den Anschlußbedingungen bei $r = a$ eine Bestimmungsgleichung für die Energie gebundener Zustände.

(iii) Lösen Sie die Gleichung graphisch und formulieren Sie eine Bedingung für die Existenz eines gebundenen Zustands.