Institut für Theoretische Physik
Universität Leipzig

Prof. Dr. B. Rosenow
Dr. D. Scherer

Quantenmechanik - Übungsblatt 13

Sommersemester 2014

Abgabe: Die Aufgaben sollen am Donnerstag, den 03.07., vor der Vorlesung schriftlich eingereicht werden. Die Besprechung erfolgt am Dienstag, den 08.07., in den Übungen.

Internet: Die Übungsblätter sind online verfügbar unter http://www.uni-leipzig.de/∼stp/Quantum_Mechanics_SS14.html.

Motivation: In der ersten Aufgabe wird der 3-dimensionale quantenmechanische harmonische Oszillator auf verschiedene Arten untersucht. Da der höherdimensionale harmonische Oszillator eine vollständig separable Situation beschreibt, die sich auf den 1-dimensionalen Fall zurückführen lässt, ist ein exaktes Resultat leicht verfügbar. Etwas mehr Aufwand erfordert die Berechnung des Spektrums durch die Sommerfeld-Methode vermittels der Bestimmung der radialen Asymptotik und eines angepassten Potenzreihenansatzes. In der zweiten Aufgabe wird der Hamilton-Operator eines 2-Niveau Systems betrachtet - das prototypische System für die Implementierung eines sogenannten *Qbits* (Quanten-Bit), der grundlegende Baustein des Quanten-Computing. Die letzte Aufgabe beschäftigt sich mit den sogenannten Pauli-Matrizen, welche eine Darstellung der Drehimpulsalgebra für Spin 1/2 realisieren.

44. Der 3-dimensionale harmonische Oszillator *2+2+3+2 Punkte*

Ein isotroper, 3-dimensionaler harmonischer Oszillator wird durch das Potential

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

beschrieben.

(a) Lösen Sie das Eigenwertproblem durch einen Separationsansatz von der Form $\Psi(\mathbf{x}) = \varphi(x)\chi(y)\psi(z)$ und mittels Ihrer Kenntnisse des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators. Geben Sie die entsprechenden Energieeigenwerte an! Bestimmen Sie den Entartungsgrad des Grundzustands und des ersten angeregten Zustands.

(b) Leiten Sie aus der stationären Schrödinger-Gleichung eine Gleichung für die radiale Wellenfunktion $R(r)$ her, wobei wir nun $\Psi(\mathbf{x}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ mit $r = |\mathbf{x}|$ ansetzen. Bestimmen Sie nach der Substitution $R(r) = u(r)/r$ das asymptotische Verhalten der Funktion $u(r)$ für große r.

(c) Machen Sie für die Funktion $u(r)$ den Ansatz $u(r) = y(r)\exp(-r^2/2r_0^2)$, mit $r_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$ und der Potenzreihe $y(r) = r^s \sum_{q=0}^{\infty} a_q r^q$. Durch Koeffizientenvergleich der Potenzen von r erhalten Sie Bedingungen für die Koeffizienten a_q. Bestimmen Sie nun s (mit $s > 0$ wegen Regularität) durch die Forderung, dass $a_0 \neq 0$ indem Sie die $(r \to 0)$-Asymptotik betrachten und stellen Sie damit einen Zusammenhang zur Quantenzahl l her.

(d) Leiten Sie unter der Annahme $a_1 = 0$ eine Rekursionsformel für die a_q's her. Durch die Formulierung eines Abbruchkriteriums für die Rekursion bei einem bestimmten $q = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, erhalten Sie die Energieeigenwerte. Bestimmen Sie erneut den Entartungsgrad von

Grund- und erstem angeregtem Zustand, und vergleichen Sie das Ergebnis für Energieeigenwerte und Entartung mit dem Resultat aus Teil (a).

45. 2-Niveau Systeme *3 Punkte*

Der Hamilton-Operator eines 2-Niveau Systems sei gegeben durch

$$\hat{H} = a\big(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big),$$

wobei $a > 0$ die Dimension Energie besitze. Berechnen Sie die Energieeigenwerte und Eigenzustände bezüglich der orthonormalen Basis $\{|1\rangle, |2\rangle\}$.

46. Pauli-Matrizen *3 Punkte*

Wie bereits bekannt, erfüllen die Komponenten des Drehimpulsoperators die Kommutatorrelation $[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k$. Da $[\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z] = 0$, lassen sich simultane Eigenfunktionen der Operatoren $\hat{\mathbf{L}}^2$ and $\hat{L}_z$ finden:

$$\hat{\mathbf{L}}^2\Psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1)\Psi_{lm}$$
$$\hat{L}_z\Psi_{lm} = \hbar m\Psi_{lm},$$

wobei l auf die Werte $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ quantisiert ist. Für gegebenes l sind die erlaubten Werte von $m = -l, -l+1, ..., l-1, l$. Im Falle von Bahndrehimpuls sind l bzw. m ganze Zahlen, halbzahlige Werte für l, m sind jedoch in der Natur durch intrinischen Drehimpuls (den sogenannten *Spin*) fermionischer Teilchen realisiert. Alle bekannten elementaren fermionischen Materieteilchen tragen den Spin $l = \frac{1}{2}$. Bestimmen Sie die entsprechende Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$. Die Matrixdarstellungen definieren bis auf einen Faktor $\hbar/2$ die sogenannten *Pauli-Matrizen.*